

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DEL 31·I·2019

Svolgi questo compito descrivendo sinteticamente i tuoi procedimenti e motivando ogni risposta. Risultati e calcoli privi di spiegazione potrebbero non essere valutati.

Ti è permesso l'uso di:

- macchine calcolatrici non programmabili né grafiche,
- strumenti da scrittura e disegno,
- libri, appunti, quaderni, e ogni altro materiale cartaceo.

Il compito consta di un totale di nove domande, la risposta corretta a ciascuna delle quali vale quattro punti. Ricorda che le domande di ciascun esercizio sono in ordine di difficoltà, per cui le tre domande 1 (cioè A.1, B.1 e C.1) sono le più facili, mentre le tre domande 3 sono le più difficili.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



ESERCIZIO A

- A.1 – Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
- A.2 – Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0 da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
- A.3 – Se il numero iniziale di individui alla domanda A.2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

ESERCIZIO B

Il *mean time between failures* (MTBF) è un parametro di affidabilità degli apparati tecnologici. Il MTBF di un dispositivo è il tempo medio che intercorre fra due guasti successivi del dispositivo, supponendo che ogni guasto sia immediatamente riparato. Indichiamo con $MTBF_X$ il MTBF di un certo sistema X; e indichiamo con p_X la probabilità che il sistema X si guasti in ogni data ora di funzionamento (probabilità che assumiamo costante). Allora vale la relazione (dove $h = \text{“ore”}$)

$$p_X = 1 - e^{-\frac{1 \text{ h}}{MTBF_X}}$$

Supponiamo, adesso, di avere una macchina M che è costituita da due parti indipendenti fra loro: A e B. Se una qualunque delle due parti si guasta, allora la macchina, nel suo complesso, è guasta. Il MTBF delle parti è:

$$MTBF_A = 100\,000 \text{ h} \qquad MTBF_B = 33\,000 \text{ h}$$

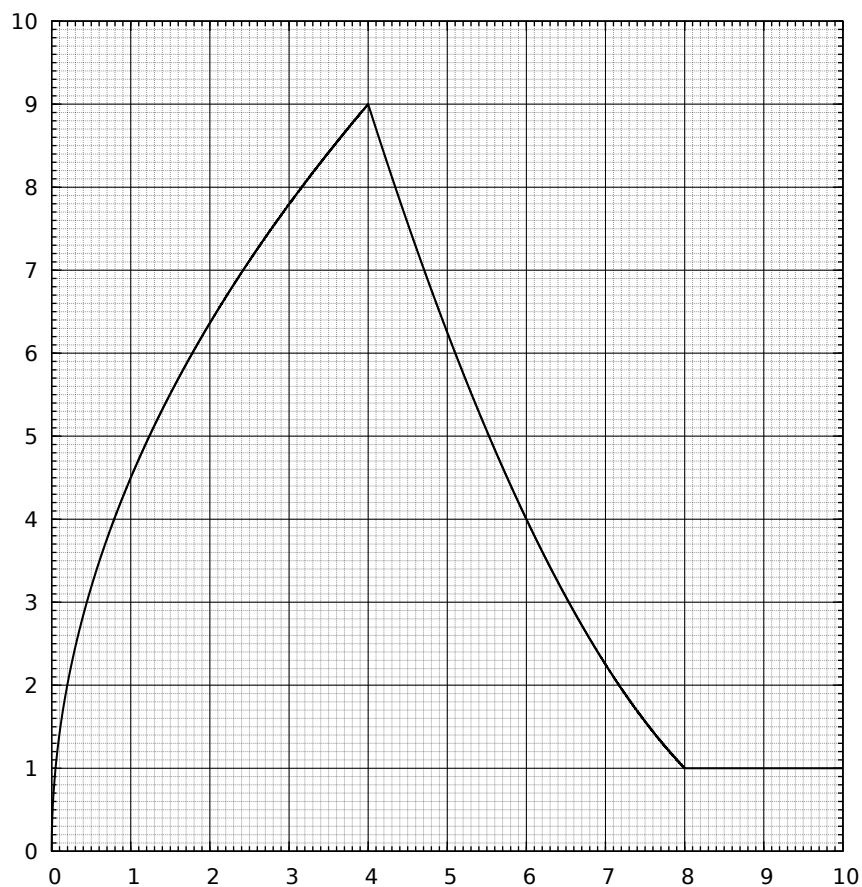
- B.1 – Indichiamo con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{M}$ gli eventi che rispettivamente A, B e M si guastino in una certa ora di lavoro. Quale relazione lega questi eventi? Usa la formula data nel testo per calcolare p_A e p_B , desumi p_M , quindi determina $MTBF_M$. Esprimi il tuo risultato con due cifre significative di precisione. (*Suggerimento: verifica il risultato con la formula al punto B.3, se viene diverso allora hai sbagliato qualcosa.*)
- B.2 – Supponiamo che l'evento che una macchina si guasti durante una certa ora sia indipendente dagli eventi che si guasti in una qualunque altra ora. Quale è la probabilità che la macchina M subisca almeno un guasto durante 24 ore di lavoro? Quante ore di lavoro servono perché vi sia una probabilità del 50% che M si guasti?
- B.3 – La formula seguente lega il MTBF di M a quelli di A e di B.

$$MTBF_M = \frac{1}{\frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B}}$$

Dimostra questa formula (per esempio eseguendo i calcoli del punto B.1 in maniera letterale, ma non è l'unico modo). Quale formula va usata per una macchina costituita da tre parti indipendenti, e perché?

ESERCIZIO C

Considera la funzione $f: [0, 10] \rightarrow [0, 10]$ il cui grafico è rappresentato in figura.



C.1 – Traccia il grafico della funzione $g(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{f(x)}$ sul modulo millimetrato che ti è stato fornito. (Per rispondere a questa domanda basta il disegno: non è richiesto che descrivi il tuo procedimento.)

C.2 – Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$f(x) - x - \frac{1}{x} = 0$$

nell'intervallo $[0, 10]$, approssimando alla prima cifra decimale.

C.3 – Stima più precisamente che puoi il valore di

$$\int_0^{10} f(x) + 6 \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

e indica il tuo risultato con un numero appropriato di cifre significative (giustificando la scelta).