

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DEL 2-V-2019

Svolgi questo compito descrivendo sinteticamente i tuoi procedimenti e motivando ogni risposta. Risultati e calcoli privi di spiegazione potrebbero non essere valutati.

Ti è permesso l'uso di:

- macchine calcolatrici non programmabili né grafiche,
- strumenti da scrittura e disegno,
- libri, appunti, quaderni, e ogni altro materiale cartaceo.

Il compito consta di un totale di nove domande, la risposta corretta a ciascuna delle quali vale quattro punti. Ricorda che le domande di ciascun esercizio sono in ordine di difficoltà, per cui le tre domande 1 (cioè A.1, B.1 e C.1) sono le più facili, mentre le tre domande 3 sono le più difficili.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



ESERCIZIO A

Considera la funzione $f(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$, dove L , k , e x_0 sono parametri fissati.

A.1 – Verifica che la funzione data risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{k}{L}f(x)(L - f(x))$$

A.2 – Fissa $L = 6$, $k = 0.5$, e $x_0 = 5$. Traccia il grafico di $f(x)$ per x che varia fra 0 e 10.

A.3 – Con i parametri fissati al punto precedente, calcola precisamente il valore, se riesci, altrimenti dai una stima ragionevolmente accurata, dell'integrale $\int_0^{10} f(x) dx$.

ESERCIZIO B

Dieci persone, sei donne e quattro uomini, partecipano a quattro lotterie diverse (stocasticamente indipendenti), ciascuna delle quali assegna un premio, con probabilità uniforme, a una delle dieci persone.

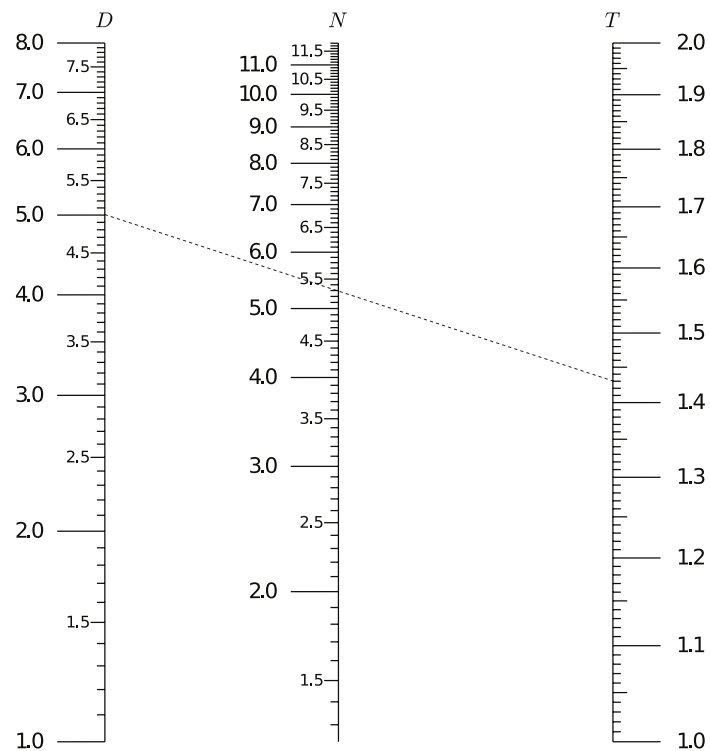
B.1 – Quale è la probabilità che tutti i premi vadano alle donne? E la probabilità che nessuno dei premi vada ad una donna?

B.2 – Considera la variabile aleatoria X che rappresenta il numero di premi che vanno, in totale, alle donne. Determina la legge (detta anche distribuzione) di questa variabile aleatoria, e rappresentala mediante un istogramma.

B.3 – Calcola valore atteso e varianza della variabile aleatoria X .

ESERCIZIO C

Un *nomogramma* è uno strumento di calcolo grafico che veniva usato durante il ventesimo secolo, e, sebbene raramente, si usa ancora oggi. Il nomogramma disegnato qua sotto rappresenta una relazione che lega tre quantità, D , N , e T . Si usa per calcolare una delle tre quantità, note le altre due. Per esempio, sapendo che $D = 5.0$ e $T = 1.43$, si traccia una linea retta (tratteggiata nella figura) che connette i punti corrispondenti sulle rispettive scale, e, l'intersezione di questa retta con la scala N indica il valore di questa quantità: $N = 5.3$.



- C.1 – Supponendo di sapere che $D = 3.0 \pm 0.1$ e $N = 4.0 \pm 0.2$, che valore di T otteniamo, e con quale incertezza?
- C.2 – Traccia un grafico bi-logaritmico che riporti in ascissa, su una scala lunga 15 cm, i valori da 1 a 2, e, in ordinata, su una scala della medesima lunghezza, i valori da 1 a 10, descrivendo sinteticamente la procedura che segui per graduare le scale.
- C.3 – Su questo grafico traccia le due curve che rappresentano la relazione che lega T , in ascissa, a N , in ordinata, per $D = 2.0$ e per $D = 5.0$. Determina quindi una espressione analitica di queste curve.