

SOLUZIONI DELLA PROVA DI ESEMPIO

Scrivo in carattere stampatello una possibile soluzione corretta e completa del compito. *Uso il carattere corsivo, inoltre, per aggiungere note e osservazioni addizionali, che non fanno parte della soluzione strettamente detta.*

ESERCIZIO A

- A.1 – Possiamo stimare la quota del passo (rispettivamente della vetta) con la media aritmetica delle osservazioni, e l'errore assoluto con la deviazione standard della media, ossia la deviazione standard della serie delle osservazioni divisa per la radice quadrata del numero delle osservazioni.

Nota: non sarebbe sbagliato usare un multiplo della deviazione standard, per esempio il doppio, come stima dell'errore. Usando una la deviazione standard, otteniamo una stima del cosiddetto errore standard, ma l'esercizio non chiede di fornire proprio l'errore standard, per cui c'è libertà di scelta. Per esempio, un'altra stima che si può usare è la semidispersione dei dati, ossia la differenza fra il dato più grande e il dato più piccolo. Ciascuno di questi approcci è corretto, purché sia detto chiaramente come si sceglie di procedere.

Quanto alla forma in cui rappresenteremo l'errore, sarebbe sbagliato indicarlo come errore relativo, perché la scala delle quote è basata su uno zero convenzionale (ossia la quota del livello del mare), dobbiamo quindi usare la forma assoluta.

Svolgendo i calcoli

$$\text{quota del passo} = \frac{2978 + 3004 + \dots + 2947}{10} \text{ m} = 2977.2 \text{ m}$$

Trucco: nel fare i calcoli, conviene sottrarre mentalmente 2900 da tutti i numeri, poi fare la media, poi sommare di nuovo 2900, così si riduce il numero delle cifre da introdurre nella calcolatrice.

deviazione standard delle misure =

$$= \sqrt{\frac{(2978 - 2977.2)^2 + (3004 - 2977.2)^2 + \dots + (2947 - 2977.2)^2}{10}} \text{ m} \sim 23.2 \text{ m}$$

Nota: dividere per 9 anziché 10 sotto radice da un risultato che, per ragioni teoriche, è leggermente preferibile. La differenza, tuttavia, è piccola, e entrambe le formule sono considerate corrette ai fini del corso.

$$\text{deviazione standard della media} = \frac{\text{deviazione standard delle misure}}{\sqrt{10}} \sim 7.3 \text{ m}$$

$$\text{quota della vetta} = \frac{3828 + 3858 + \dots + 3806}{10} \text{ m} = 3831.7 \text{ m}$$

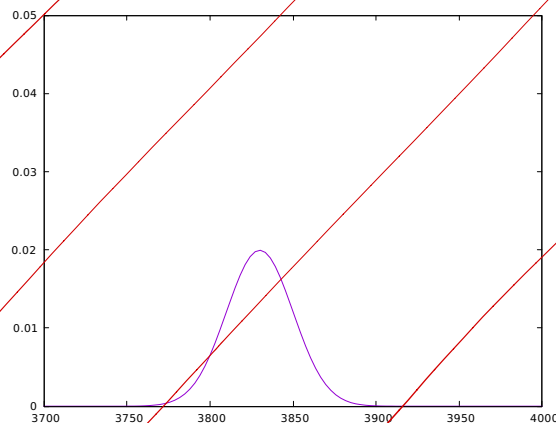
deviazione standard delle misure =

$$= \sqrt{\frac{(3828 - 3831.7)^2 + (3858 - 3831.7)^2 + \dots + (3806 - 3831.7)^2}{10}} \text{ m} \sim 21.8 \text{ m}$$

$$\text{deviazione standard della media} = \frac{\text{deviazione standard delle misure}}{\sqrt{10}} \sim 6.9 \text{ m}$$

Ricordando che conviene esprimere i risultati con una precisione tale per cui l'errore ha una cifra significativa, diciamo che il Passo delle Sagnette è a 2977 ± 7 metri sul livello del mare, mentre la vetta è a 3832 ± 7 metri.

A.2 – Dalla teoria e dai calcoli svolti al punto precedente, sappiamo che la media della nostra Gaussiana è circa $\mu = 3832$ m e la varianza, ossia il quadrato della deviazione standard, è $\sigma^2 = 21.8^2 \sim 475$ m². Un grafico approssimativo è quindi come segue.



Nota: non è richiesta precisione nel grafico. Basta che la forma generale della curva sia giusta, il picco si trovi correttamente in corrispondenza della media, e i flessi a $\mu \pm \sigma$. È richiesto che le unità siano riportate correttamente sull'asse delle ascisse.

Non in programma

A.3 – Seguendo un ragionamento semplicistico, potremmo stimare la differenza di quota calcolando la differenza fra le due quote stimate, quindi applicare la formula per l'errore sulla differenza di due misure (la somma degli errori assoluti). Questa soluzione non sarebbe errata, ma neanche pienamente soddisfacente. Riceverebbe quindi un punteggio parziale.

È ragionevole ipotizzare che gli strumenti di misura usati siano affetti ciascuno da un proprio errore sistematico, e, inoltre, ogni misura sia affetta da un errore casuale indipendente. Calcolando la differenza fra la quota della vetta e la quota del passo misurata da un certo strumento, l'errore sistematico di quello strumento si sottrae. Conviene allora calcolare le dieci differenze, e usare media e deviazione standard di queste per la nostra stima. Le differenze sono come segue, in metri.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L
850	854	856	840	872	854	843	856	861	859

E, proseguendo come nel primo punto.

$$\text{differenza di quota} = \frac{850 + 854 + \dots + 859}{10} \text{ m} = 854.5 \text{ m}$$

deviazione standard delle differenze =

$$= \sqrt{\frac{(850 - 854.5)^2 + (854 - 854.4)^2 + \dots + (859 - 854.5)^2}{10}} \text{ m} \sim 8.6 \text{ m}$$

$$\text{deviazione standard della media} = \frac{\text{deviazione standard delle differenze}}{\sqrt{10}} \sim 2.7 \text{ m}$$

Stimiamo quindi la differenza con 855 ± 3 metri. *Questo risultato suggerisce che effettivamente ci sia una cancellazione di errori sistematici, altrimenti avremmo ottenuto un errore almeno pari all'errore sulle singole misure.*

ESERCIZIO B

B.1 – Se chiamiamo A l'evento che l'urna estratta sia A, rispettivamente B l'evento che l'urna sia B, e N l'evento che la palla estratta sia nera, allora la richiesta del problema è di calcolare $\Pr(N)$. Intendiamo scomporre l'evento N nell'unione di $A \cap N$ e $B \cap N$. Dai dati otteniamo

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= 0.5 & \Pr(N | A) &= 20/(10 + 20) \\ \Pr(B) &= 0.5 & \Pr(N | B) &= 30/(30 + 40)\end{aligned}$$

EsPLICITANDO le probabilità condizionali

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(N \cap A)}{\Pr(A)} &= \Pr(N | A) = \frac{20}{10 + 20} & \rightarrow & \Pr(N \cap A) = \frac{20}{10 + 20} \Pr(A) = \frac{1}{3} \\ \frac{\Pr(N \cap B)}{\Pr(B)} &= \Pr(N | B) = \frac{30}{30 + 40} & \rightarrow & \Pr(N \cap B) = \frac{30}{30 + 40} \Pr(B) = \frac{3}{14}\end{aligned}$$

Quindi

$$\Pr(N) = \Pr(N \cap A) + \Pr(N \cap B) = \frac{23}{42} \sim 54.8\%$$

Nota: non è necessario indicare il risultato sia come percentuale sia come frazione. Anzi, una soluzione che svolga tutti i calcoli in forma numerica è ugualmente accettabile ai fini dell'esame.

B.2 – Chiamando NN l'evento che le prime due palle estratte siano nere, l'esercizio chiede di calcolare $\Pr(NN | N)$. Usando di nuovo la definizione di probabilità condizionale, abbiamo

$$\Pr(NN | N) = \frac{\Pr(NN \cap N)}{\Pr(N)} = \frac{\Pr(NN)}{\Pr(N)}$$

Dove la seconda uguaglianza vale perché l'evento NN è un sottoinsieme dell'evento N: in altre parole se le prime due palle sono nere, allora va da sé che la prima palla è nera. Resta quindi il problema di calcolare la probabilità di NN. Proseguendo come nel primo punto abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\Pr(NN \cap A)}{\Pr(A)} &= \Pr(NN | A) = \frac{20}{10 + 20} \cdot \frac{19}{10 + 19} \sim 0.43678 \\ \frac{\Pr(NN \cap B)}{\Pr(B)} &= \Pr(NN | B) = \frac{30}{30 + 40} \cdot \frac{29}{29 + 40} \sim 0.18012\end{aligned}$$

$$\Pr(NN) = \Pr(NN \cap A) + \Pr(NN \cap B) \sim 0.43678 \cdot 0.5 + 0.18012 \cdot 0.5 \sim 0.30845$$

Da cui

$$\Pr(NN | N) = \frac{\Pr(NN)}{\Pr(N)} \sim 56.3\%$$

B.3 – Sì, c'è. Supponiamo, per esempio, che il giocatore metta una sola palla nera nell'urna A, e tutte le altre nell'urna B. Ripetendo i calcoli del primo punto otteniamo, per questa distribuzione

$$\Pr(\mathbf{N}) = 1 \cdot \Pr(\mathbf{A}) + \frac{49}{49+50} \cdot \Pr(\mathbf{B}) \sim 74.7\%$$

Un modo per arrivare alla soluzione è notare che un'urna piena di sole palle nere garantisce immediatamente di vincere col 50% di probabilità, non sembra quindi una cattiva mossa mettere solo palle nere in una delle due urne. Volendo seguire questa via, conviene chiaramente che nell'altra urna ci siano più palle nere possibile. Quindi, l'urna che contiene solo palle nere, dovrà contenerne solo una. Questa, si può verificare, è la soluzione ottimale, quella che rende massima la probabilità di vincere, però non è l'unica che soddisfa la richiesta dell'esercizio.

ESERCIZIO C

C.1 – Il processo descritto è una decrescita esponenziale, e l'equazione che rappresenta questo processo ha la forma

$$\frac{dA}{dt} = -k \cdot A$$

dove k è una costante (che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo). La soluzione generale di questa equazione è

$$A(t) = C \cdot e^{-kt}$$

C.2 – Possiamo iniziare imponendo che la soluzione passi per il primo e l'ultimo dei punti dati. Otteniamo

$$C \cdot e^{-kt_0} = 2.4 \text{ mg/l}$$

$$C \cdot e^{-k(t_0+120 \text{ min})} = 0.25 \text{ mg/l}$$

dividendo membro a membro otteniamo

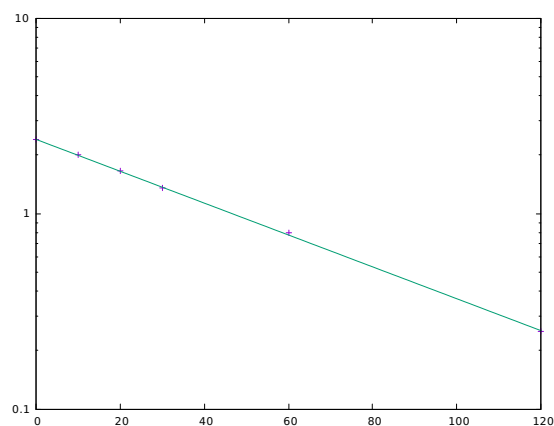
$$e^{k \cdot 120 \text{ min}} = 9.6$$

da cui $k = \frac{\log_e(9.6)}{120 \text{ min}} \sim 0.0188 \text{ min}^{-1}$.

La soluzione particolare richiesta sarà quindi

$$\begin{aligned} A(t) &= C \cdot e^{-kt} = C \cdot e^{-k(t_0+t-t_0)} = C \cdot e^{-kt_0} \cdot e^{-k(t-t_0)} \\ &\sim 2.4 \cdot e^{-0.0188(t-t_0) \text{ min}^{-1}} \text{ mg/l} \end{aligned}$$

Nota: come osservato spesso a lezione, usare le unità di misura corrette in queste espressioni può essere un po' complicato. Sarebbe corretto anche scrivere una volta per tutte "misuro il tasso alcolemico in milligrammi al litro e il tempo in minuti", e da lì in poi omettere l'indicazione delle unità di misura.



Dal grafico, constatiamo che la soluzione che abbiamo determinato rappresenta bene i dati sperimentali.

C.3 – L'esercizio chiede il tempo di dimezzamento del tasso alcolemico di Homer, ossia il tempo $t_{1/2}$ tale che $A(t_0 + t_{1/2}) = \frac{1}{2}A(t_0)$. Sostituendo la soluzione dell'equazione otteniamo

$$2.4 \cdot e^{-0.0188t_{1/2}\text{min}^{-1}} \text{mg/l} = \frac{1}{2} \cdot 2.4 \cdot e^0 \text{mg/l}$$

semplificando

$$e^{-0.0188t_{1/2}\text{min}^{-1}} = \frac{1}{2}$$

Quindi $t_{1/2} = -\log_e \left(\frac{1}{2} \right) / 0.0188 \text{ min} \sim 37 \text{ min}$

L'equazione dice che l'alcol smaltito da Homer nell'unità di tempo, $-\frac{dA}{dt}$, è $k \cdot 1 \text{ mg/l}$, ossia 0.0188 milligrammi di alcol per ogni litro di sangue di Homer per ogni minuto. Siccome il tasso alcolemico è costante, tanto è l'alcol assunto da Homer quanto quello smaltito. Quindi Homer deve assumere 0.0188 milligrammi di alcol per ogni litro del suo sangue al minuto.