

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DEL 17-II-2020

Svolgi questo compito descrivendo sinteticamente i tuoi procedimenti e motivando ogni risposta.

Ti è permesso l'uso di:

- macchine calcolatrici non programmabili né grafiche,
- strumenti da scrittura e disegno,
- libri, appunti, quaderni, e ogni altro materiale cartaceo.

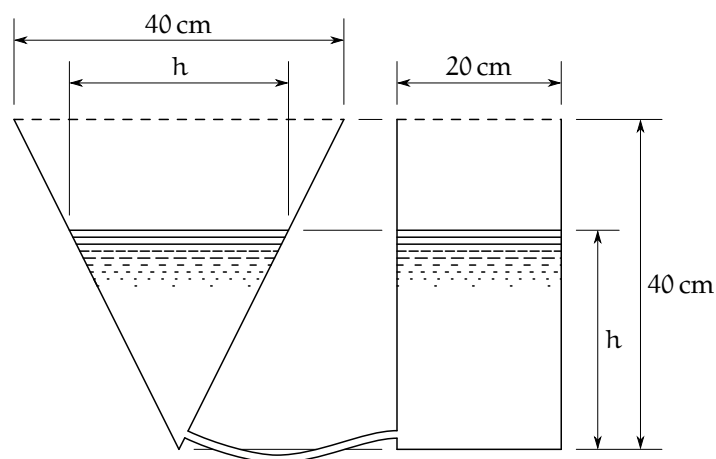
Il compito consta di un totale di nove domande, la risposta corretta a ciascuna delle quali vale quattro punti. Ricorda che le domande di ciascun esercizio sono in ordine di difficoltà, per cui le tre domande 1 (cioè A.1, B.1 e C.1) sono le più facili, mentre le tre domande 3 sono le più difficili.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



ESERCIZIO A

L'apparato rappresentato in figura è costituito da due contenitori, uno conico ed uno cilindrico, disposti con il loro asse in posizione verticale. In essi si introduce un certo volume V di acqua. Un tubicino di volume trascurabile connette i due contenitori, così che, per la legge dei vasi comunicanti, il livello h raggiunto dal liquido nei due contenitori coincide.



- A.1 – Determina l'espressione analitica della funzione che associa al livello h il corrispondente volume $V(h)$, traccia quindi un grafico cartesiano di questa funzione.
- A.2 – Calcola, con la precisione di tre cifre significative, a che livello bisogna riempire l'apparecchio affinché esso contenga 15.0 litri d'acqua.
- A.3 – Supponendo che il volume della domanda precedente sia noto con un'incertezza di $\pm 2\%$, che incertezza assoluta abbiamo sulla risposta?

ESERCIZIO B

Una spia si trova dietro le linee nemiche. Egli può lanciare messaggi radio che hanno, tutti indipendentemente, probabilità 0.1 di essere ricevuti dal suo quartier generale, e probabilità 0.01, pure indipendentemente, di essere captati dal nemico.

- B.1 – Supponendo che la spia lanci dieci messaggi, quale è la probabilità che almeno un messaggio arrivi a destinazione? Quale è la probabilità che nessuno dei messaggi venga captato dal nemico?
- B.2 – Affinché la missione della spia riesca, è necessario che almeno uno dei messaggi arrivi, senza, però, che il nemico si avveda di alcun messaggio. Traccia un grafico della probabilità di riuscita della missione al variare del numero n dei messaggi inviati, per n compreso fra 0 e 100.
- B.3 – Calcola quanti messaggi conviene inviare affinché la probabilità di riuscita della missione sia più alta possibile.

ESERCIZIO C

L'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} - 2x$$

rappresenta un *oscillatore smorzato*.

- C.1 – Supponendo $k = 3$, trova la soluzione particolare $x(t)$ dell'equazione tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.
- C.2 – Supponendo $k = 2$, trova la soluzione particolare $x(t)$ dell'equazione tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.
- C.3 – Per ciascuna delle due soluzioni trovate ai punti precedenti, discuti se il punto stazionario $t = 0$ sia un massimo o un minimo relativo. Nel caso si trattasse di un massimo o di un minimo relativo, determina se questo sia anche assoluto.

Nota: nella soluzione dell'esercizio C, può essere conveniente avvalersi delle pagine 185 e 186 degli appunti del corso, che trovi altresì allegate a questo compito.

le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B).

$$0 \stackrel{(A)}{=} x(0) = -C e^{-0} + D = D - C \Rightarrow D = C$$

$$1 \stackrel{(B)}{=} x'(0) = v(0) = C \cdot e^{-0} = C \Rightarrow C = 1$$

Quindi, in definitiva $\boxed{x(t) = 1 - e^{-t}}$.

Osservazione L'equazione (c) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda, si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di una equazione dell' n -esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri; ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n -esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = a f'(x) + b f(x) + c$$

Non è importante che si sappia a memoria il metodo per risolvere questo tipo di equazioni. È importante sapere che le soluzioni hanno, in generale, comportamenti esponenziali e oscillanti variamente combinati (a seconda dei coefficienti). Ed è importante sapere (libro o appunti alla mano) come applicare il metodo.

① Soluzione dell'omogenea: $f''(x) = a f'(x) + b f(x)$.

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\lambda x}$.

Mettiamo $f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ nell'equazione.

$$\cancel{\lambda^2 \cdot e^{\lambda x}} = f''(x) = a f'(x) + b f(x) = a \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni λ_1 e λ_2 , e la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$.
- Se $\Delta = 0$, l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione λ , e la soluzione generale è $f(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$.
- Se $\Delta < 0$ la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = e^{\frac{a}{2}x} \cdot (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$ con $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

② Soluzione particolare.

- Se $c = 0$, $f(x) = 0$ è una soluzione particolare.
- Se $b \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{b}$ è una soluzione particolare.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{a}x$ è una soluzione part.
- Se $b = a = 0$, $f(x) = \frac{c}{2}x^2$ è una soluzione particolare.

③ La soluzione generale si ottiene sommando una soluzione particolare e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.