

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DEL 20·I·2020

Svolgi questo compito descrivendo sinteticamente i tuoi procedimenti e motivando ogni risposta.

Ti è permesso l'uso di:

- macchine calcolatrici non programmabili né grafiche,
- strumenti da scrittura e disegno,
- libri, appunti, quaderni, e ogni altro materiale cartaceo.

Il compito consta di un totale di nove domande, la risposta corretta a ciascuna delle quali vale quattro punti. Ricorda che le domande di ciascun esercizio sono in ordine di difficoltà, per cui le tre domande 1 (cioè A.1, B.1 e C.1) sono le più facili, mentre le tre domande 3 sono le più difficili.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



ESERCIZIO A

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^3(1 - x)$$

- A.1 – Traccia un grafico approssimativo di $f(x)$ per x fra -0.5 e 1.1 .
A.2 – Calcola l'area della porzione limitata di piano compresa fra l'asse x e il grafico di $f(x)$.
A.3 – Trova il massimo di $f(x)$ per $x \in [0, 1]$.

ESERCIZIO B

Secondo la teoria sviluppata da E. C. Molina, agli inizi del xx secolo, se il numero medio di chiamate contemporanee gestito da una centrale telefonica è λ , allora, detta X la variabile aleatoria che denota il numero di chiamate attive in un certo momento, vale

$$\Pr(X = 0) = e^{-\lambda} \quad \Pr(X = 1) = \lambda e^{-\lambda} \quad \Pr(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} \quad \Pr(X = 3) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{2 \cdot 3}$$

(ci limitiamo ad elencare le probabilità fino a $X = 3$, però potrebbero arrivare anche più di tre chiamate simultanee).

Nota di cultura generale: questa distribuzione di probabilità si chiama poissoniana, e serve per descrivere l'occorrenza di eventi rari: per esempio i decadimenti radioattivi, o le chiamate telefoniche nel 1910.

- B.1 – Traccia un diagramma cartesiano con, in ascissa, λ che varia fra 0 e 5, e, in ordinata, i numeri fra 0 e 1. Su questo diagramma, traccia le quattro curve che rappresentano $\Pr(X = n)$, per $n = 0 \dots 3$, in funzione di λ .
- B.2 – Calcola per quale valore di λ la probabilità dell'evento "il numero di chiamate attive è 1 o 2" è più grande possibile.
- B.3 – Calcola, con due cifre significative di precisione, per quale valore di λ c'è l'1% di probabilità di avere più di tre chiamate attive.

ESERCIZIO C

Considerando la variabile aleatoria X dell'esercizio B, studiamo l'evento $X = 0$.

- C.1 – Traccia un diagramma semilogaritmico che riporti sull'asse delle ascisse, in scala lineare, i numeri da 0 a 4, e, sull'asse delle ordinate, i numeri da 0.01 a 1. Entrambi gli assi di questo grafico devono essere lunghi quanto venti quadretti del foglio del tuo elaborato. Su questo diagramma, riporta il grafico di $\Pr(X = 0)$ in funzione di λ .
- C.2 – Volendo determinare praticamente quanto valga $\Pr(X = 0)$ per una certa centrale telefonica, vengono eseguite 25 osservazioni, in altrettanti momenti diversi, del numero di chiamate in corso, ottenendo i seguenti risultati:

0 2 3 1 0 2 0 0 2 0 0 1 0 2 1 1 2 1 4 2 2 0 2 2 1

Un tecnico decide di stimare la probabilità dell'evento $X = 0$ con la frequenza di questo evento nelle osservazioni (ossia la frazione delle osservazioni in cui si è verificato l'evento sul totale): che stima ottiene questo tecnico, e come valuta l'incertezza della sua stima?

- C.3 – Un secondo tecnico, ricordandosi che $\Pr(X = 0) = e^{-\lambda}$, decide, invece, di stimare il numero medio λ di chiamate attive, e poi desumere la probabilità cercata $\Pr(X = 0)$. Che stima di $\Pr(X = 0)$ fornisce il secondo tecnico avvalendosi delle medesime 25 osservazioni, e con che incertezza?