

Corso di matematica per CTF
Soluzioni dell'esame online del 15.11.2020

Il compito di ogni studente era leggermente diverso dagli altri. Vediamo le soluzioni di uno dei possibili compiti.

ESERCIZIO A

Calcola le seguenti espressioni (sapendo che $1\text{C} = 1\text{F} \cdot 1\text{V}$).

$$\alpha = \log_{10} \left(\frac{100 \cdot 10^{3x}}{100^x} \right) \quad \beta = \frac{10^{-1}\text{C}}{2\text{F} \cdot 10\text{mV}} \quad \gamma = \sum_{i=-1}^3 10^i \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right)$$

$$\alpha = \log_{10} \left(\frac{\overbrace{100}^{10^2} \cdot 10^{3x}}{\underbrace{100^x}_{(10^2)^x = 10^{2x}}} \right) = \log_{10} \left(\frac{10^2 \cdot 10^{3x}}{10^{2x}} \right) = \log_{10} \left(10^{\overbrace{2+3x-2x}^{2-x}} \right)$$

$\boxed{= x+2}$ 2 pt.

$$\beta = \frac{10^{-1}\text{C}}{2\text{F} \cdot \underbrace{10\text{mV}}_{10^{-2}\text{V}}} = \frac{10^{-1} \cancel{\text{F}} \cdot \cancel{\text{V}}}{2\cancel{\text{F}} \cdot 10^{-2} \cancel{\text{V}}} = \frac{10^{-1}}{2 \cdot 10^{-2}} = \boxed{5} \text{ 2 pt.}$$

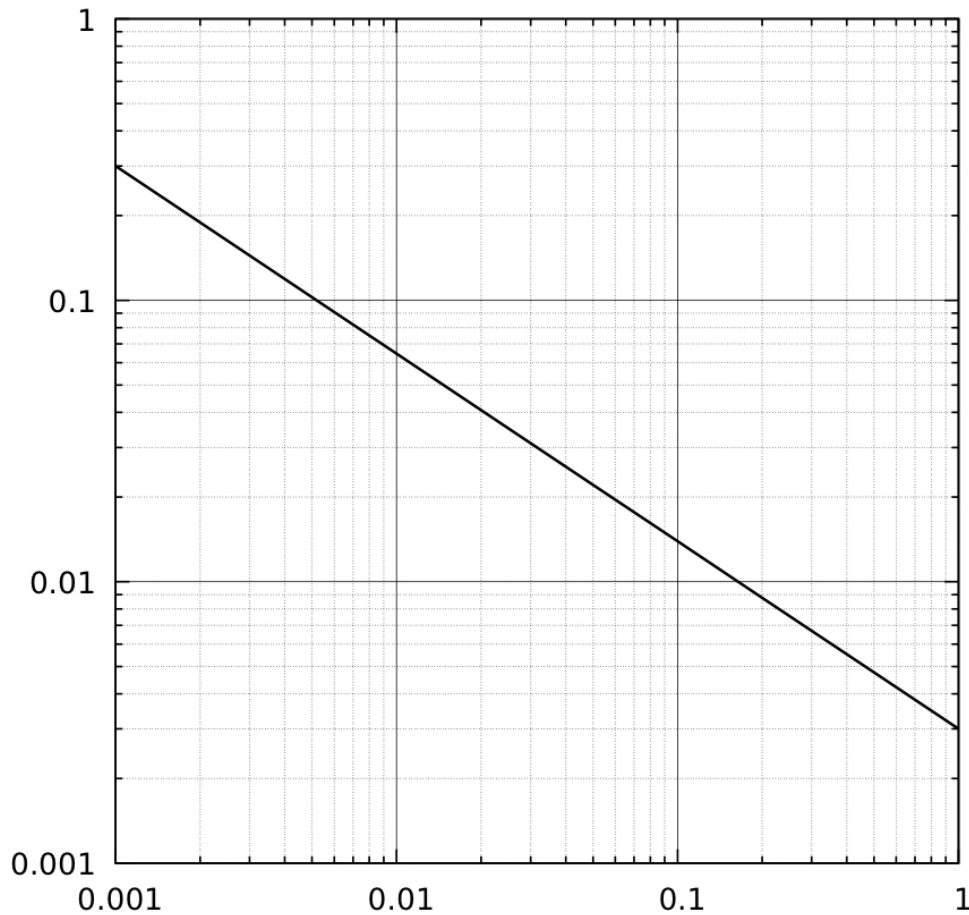
$$\gamma = \sum_{i=-1}^3 10^i \sin\left(\frac{\pi}{2} i\right) =$$

$$= \underbrace{10^{-1} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1} + \underbrace{10^0 \sin(0)}_0 + \underbrace{10^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 + \underbrace{10^2 \sin(\pi)}_0 + \underbrace{10^3 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{-1}$$

$\boxed{= -990.1}$ 2 pt.

ESERCIZIO B

Determina l'espressione della funzione rappresentata dal diagramma seguente. Calcola quindi il valore della derivata di questa funzione in 1.



Una funzione il cui grafico, rappresentato in un diagramma logaritmico (log-log), sia una retta, è della forma

$$f(x) = a \cdot x^b$$

(funzione potenza) per opportune costanti a e b .

Dal grafico otteniamo $f(0.001) = 0.3$ e $f(1) = 0.003$.

Risolvi il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a \cdot 0.001^b = 0.3 & \Leftrightarrow 0.003 \cdot 0.001^b = 0.3 \Leftrightarrow 0.001^b = 100 \\ \underbrace{a \cdot 1^b}_a = 0.003 & \Leftrightarrow a = 0.003 \end{cases} \quad b = \log_{0.001}(100) = -\frac{2}{3}$$

Di conseguenza $\boxed{f(x) = 0.003 \cdot x^{-\frac{2}{3}}}$ 3 pt.

La derivata di questa funzione è

$$f'(x) = 0.003 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -0.002 \cdot x^{-\frac{5}{3}}$$

Quindi $\boxed{f'(1) = -0.002}$ 3 pt.

ESERCIZIO C

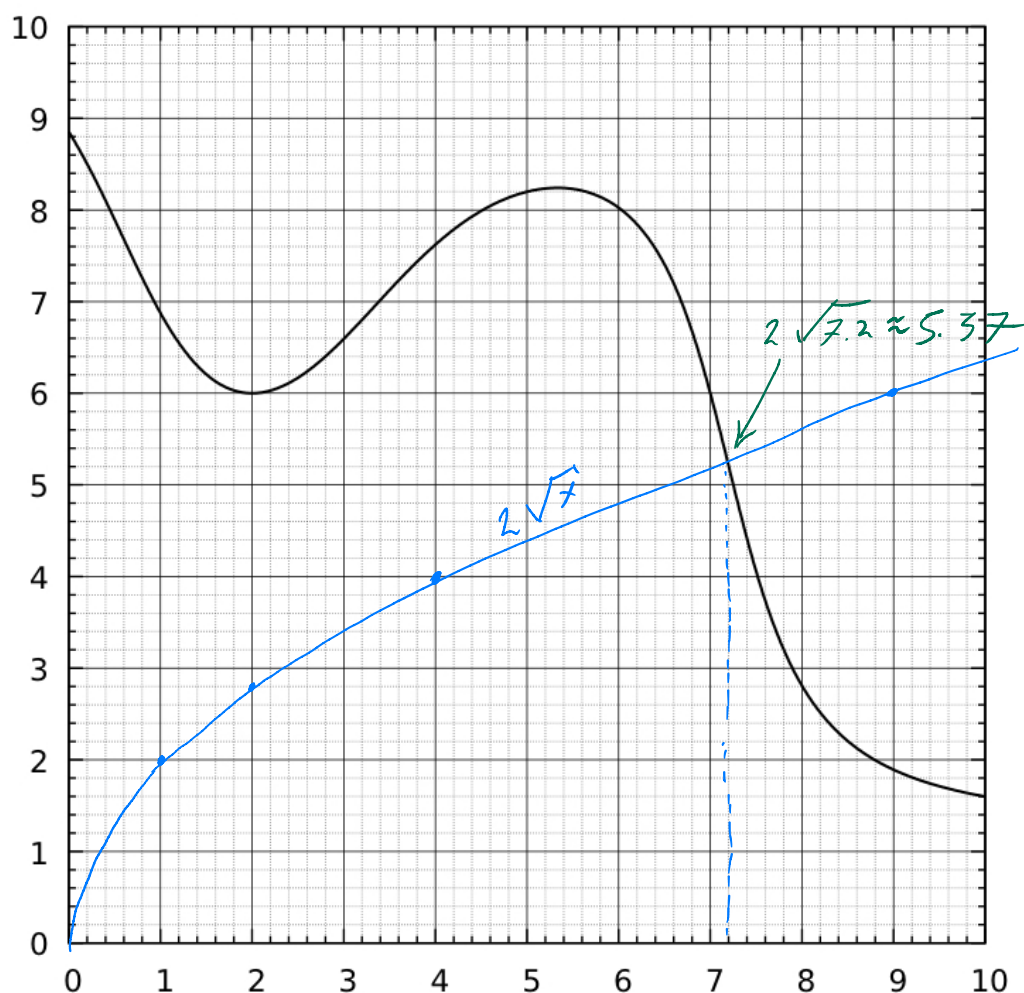
L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $50 \pm 2\%$, ed un cateto $30 \pm 5\%$. Con che incertezza percentuale è determinata la lunghezza del secondo cateto?

Usando il teorema di Pitagora, il cateto cercato, b , è

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(50 \pm 2\%)^2 - (30 \pm 5\%)^2} \\ &= \sqrt{(2500 \pm 4\%) - (900 \pm 10\%)} \\ &= \sqrt{(2500 \pm 100) - (900 \pm 90)} \\ &= \sqrt{1600 \pm 190} = \sqrt{1600 \pm 12\%} = 40 \pm 6\% \end{aligned} \quad 6 \text{ pt.}$$

ESERCIZIO D

Considera la funzione $f(x)$ rappresentata dal diagramma seguente.



1. Determina approssimativamente per quali valori di x fra 0 e 10 la derivata di $f(x)$ è positiva, e per quali è negativa.
2. Calcola un'approssimazione di $\int_1^5 f(x) dx$ usando il metodo dei trapezi.
3. Trova le soluzioni dell'equazione $f(x) = 2\sqrt{x}$ con l'approssimazione di ± 0.2 .

1. $f'(x) > 0$ per x fra 0 e 2, e fra 5.3 e 10
 $f'(x) < 0$ per x fra 2 e 5.3 2 pt.

2. $\int_1^5 f(x) dx \approx \frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{1}{2} f(5)$
 $= 3.4 + 6 + 6.6 + 7.6 + 4.1 = 27.7$ 2 pt.

Nota: un risultato entro ± 0.5 è considerato corretto,
uno entro ± 1.5 vale 1 punto su 2.

3. Il grafico di $2\sqrt{x}$ è approssimativamente come rappresentato in figura, quindi la soluzione cercata è circa 7.2 2 pt.

Numericamente, basta osservare che

$$f(7) = 6 > 5.29 = 2\sqrt{7}$$

$$f(7.4) = 4.4 < 5.44 = 2\sqrt{7.4}$$

Quindi la soluzione è compresa fra $7 = 7.2 - 0.2$ e $7.4 = 7.2 + 0.2$.

ESERCIZIO E

Quale di queste funzioni risolve l'equazione differenziale $f'' = -16f$?

$$f_1(x) = \sin(4x) + 2\cos(2x)$$

$$f_2(x) = \sin(2x)\cos(2x) + \cos(4x)$$

$$f_3(x) = \sin(4x) + \cos(4x) + 1$$

$$f_4(x) = \sin(4x) + \sin(2x)\cos(4x)$$

La risposta corretta è f_2 6 pt. Possiamo verificarlo calcolando la derivata seconda.

$$f_2(x) = \sin(2x)\cos(2x) + \cos(4x)$$

$$f_2'(x) = 2(\cos(2x))^2 - 2(\sin(2x))^2 - 4\sin(4x)$$

$$\underline{f_2''(x)} = -8\sin(2x)\cos(2x) - 8\sin(2x)\cos(2x) - 16\cos(4x)$$

$$= -16\sin(2x)\cos(2x) - 16\cos(4x) = \underline{-16f(x)} \checkmark$$

ESERCIZIO F

In un impero dell'oriente vi sono due partiti politici. Alle ultime elezioni, ha votato il sessanta per cento dei cittadini. Uno dei partiti ha preso tre quarti dei voti, e l'altro gli altri. Che probabilità c'è che presi quattro cittadini a caso, abbiano votato tutti e quattro, e tutti per lo stesso partito?

Dai dati dell'esercizio si deduce che il 45% dei cittadini ha votato per il primo partito, il 15% per il secondo, e il 40% non ha votato. L'evento di cui è richiesta la probabilità è l'unione dei due eventi incompatibili

E_1 = "i quattro cittadini hanno votato tutti per il primo partito"

E_2 = "i quattro cittadini hanno votato tutti per il secondo partito"

Ciascuno di questi eventi è un'intersezione di quattro eventi indipendenti, per esempio

E_1 = "il primo cittadino ha votato per il primo partito" $\cap$
"il secondo" $\cap$ "il terzo" $\cap$ "il quarto ..."

Per cui possiamo calcolare

$$Pr(E_1) = 0.45^4 \approx 0.04101 \quad Pr(E_2) = 0.15^4 \approx 0.00051$$

La probabilità cercata è quindi

$$Pr(E_1) + Pr(E_2) \approx \boxed{4.15\%} \quad 6pt.$$

Nota: la risposta 4% è considerata corretta.