

Soluzioni dell'esame scritto del 12.6.2020

ESERCIZIO A

Calcola le percentuali seguenti indicando il risultato, correttamente approssimato, con due cifre significative di precisione (2pt ciascuna).

1. Un tizio mangia per tre ore ogni giorno salvo il venerdì, e di venerdì digiuna. Che percentuale del suo tempo impiega, questo tizio, mangiando?
2. Una quantità decade esponenzialmente col tempo di dimezzamento di 12 ore. Che percentuale della quantità iniziale rimane dopo 16 ore.
3. Il 30% dei libri di matematica ha la copertina gialla, ma, sul totale dei libri, solo il 5% ha la copertina gialla. Lo 0.4% dei libri parla di matematica. Che percentuale dei libri dalla copertina gialla parla di matematica?

1. Egli mangia per 6.3 ore ogni settimana, quindi la frazione del suo tempo impiegata mangiando è $\frac{6.3}{7.24} = \frac{3}{28} \approx 11\%$

Nota: $\frac{3}{28} = 10.714...\%$ si approssima a 11% non a 10%.

2. La quantità dopo n ore, q_n , vale $q_n = q_0 \cdot 2^{-\frac{n}{12}}$.
Abbiamo quindi $q_n = q_0 \cdot 2^{-\frac{16}{12}} \approx q_0 \cdot 0.3968... \approx q_0 \cdot 40\%$

3. Su N libri:

$N \cdot 0.05$ ↙ totale della richiesta hanno la copertina gialla

$N \cdot 0.004$ parlano di matematica

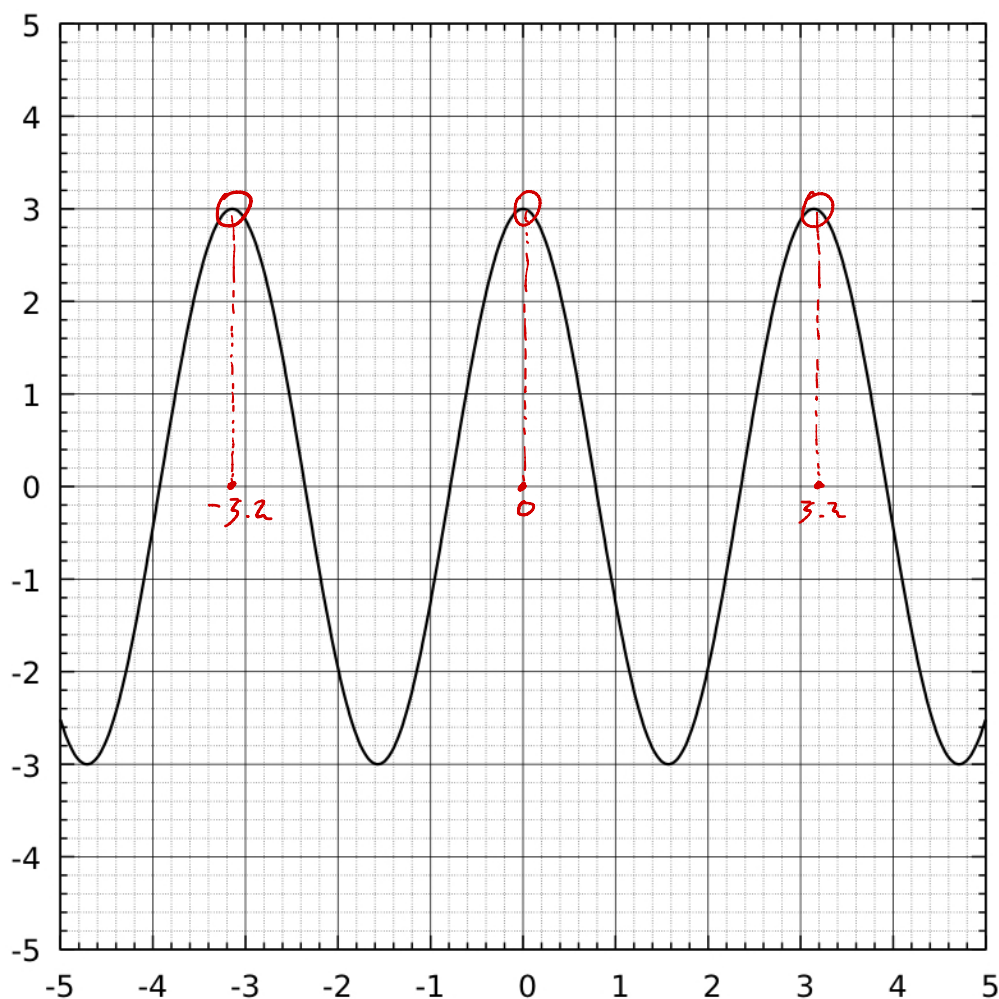
$N \cdot 0.004 \cdot 0.30$ hanno la c.g. e parlano di mate.

↖ parte della richiesta

$$\frac{\text{giallo e mate.}}{\text{giallo}} = \frac{\cancel{N} \cdot 0.004 \cdot 0.30}{\cancel{N} \cdot 0.05} = 0.024 = 2.4\%$$

ESERCIZIO B

Il grafico seguente rappresenta la funzione $f(x) = A \sin(Bx + C)$. Determina i parametri A , B e C (nota: c'è più di una scelta valida, per risolvere l'esercizio basta fornire una terna di parametri corretta).



Nota: questo esercizio è quasi uguale ad uno svolto a lezione (p. 161 delle note - ~~88~~ lezione).
Siccome il grafico oscilla fra -3 e 3 , scegliamo $A = 3$ ($A = -3$ va anche bene). ~~3~~
Dal grafico $f(0) = 3$, ma $f(0) = \cancel{3} \sin(B \cdot 0 + C)$,
per cui $\sin(C) = 1$. Scegliamo quindi $C = \frac{\pi}{2}$.
Siamo arrivati a $f(x) = 3 \sin(Bx + \frac{\pi}{2})$.

Studiamo ora i punti in cui $f(x) = 3$

$$f(x) = 3$$

$$3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} k$$

Questi punti sono quindi

$$\dots, -2 \cdot \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, 2 \cdot \frac{2\pi}{3}, \dots$$

Dal grafico, vediamo anche che sono

$$\dots, -3.2, 0, 3.2, \dots$$

in rosso nella
figura

Quindi $\frac{2\pi}{3} \approx 3.2$ e $\underline{3} \approx \frac{2\pi}{\underline{3.2}} \approx \underline{2}$.

In definitiva, siamo giunti all'ipotesi che

$$f(x) = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Conviene, ora, tracciare il grafico di questa funzione per verificare che coincida con quello dato.

Nota: altre scelte valide sono $-3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, $3 \sin\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right)$, $3 \sin\left(2x - \frac{3}{2}\pi\right)$, etc. E' anche corretto scrivere $\frac{\pi}{2}$ etc. in forma numerica.

ESERCIZIO C

Il teorema del coseno dice che i lati a , b e c di un triangolo soddisfano la relazione

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

dove γ è l'angolo compreso fra i lati a e b . I tre lati di un triangolo, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, sono noti con l'incertezza di $\pm 1\%$. Determina l'incertezza assoluta sull'angolo γ misurato in gradi (dai la risposta con due cifre significative di precisione).

Per il valore di γ abbiamo

$$\underbrace{5^2}_{25} = \underbrace{3^2 + 4^2}_{25} - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(\gamma) \Rightarrow \cos(\gamma) = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$

Gli intervalli di incertezza per a , b , c sono

$$a_{\min} = 2.97 \quad a_{\max} = 3.03$$

$$b_{\min} = 3.96 \quad b_{\max} = 4.04$$

$$c_{\min} = 4.95 \quad c_{\max} = 5.05$$

Si vede che γ è massimo quando c è massimo e a e b sono minimi. Vice versa γ è minimo se c è minimo mentre a e b sono massimi. Questo si giustifica provando le 8 possibilità o facendo affidamento sull'intuizione geometrica.

$$c_{\max}^2 = a_{\min}^2 + b_{\min}^2 - 2a_{\min}b_{\min}\cos(\gamma_{\max})$$

$$\cos(\gamma_{\max}) = \frac{a_{\min}^2 + b_{\min}^2 - c_{\max}^2}{2a_{\min}b_{\min}} \approx -0.06251$$

$$\gamma_{\max} \approx 93.58^\circ$$

$$c_{min}^2 = a_{max}^2 + b_{max}^2 - 2 a_{max} b_{max} \cos(\gamma_{min})$$

$$\cos(\gamma_{min}) = \frac{c_{min}^2 - a_{max}^2 - b_{max}^2}{2 a_{max} b_{max}} \approx 0.04085$$

$$\gamma_{min} \approx 87.66^\circ$$

L'incertezza è quindi $\Delta\gamma = \frac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{2} \approx 2.39^\circ$.

Per cui $\boxed{\gamma = (90.0 \pm 2.4)^\circ}$.

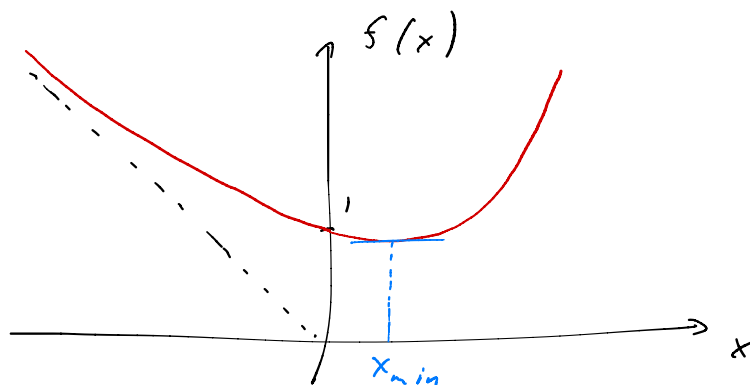
ESERCIZIO D

Considera la funzione $f(x) = 2^x - x$.

1. Calcola $\int f(x) dx$.
2. Per che x il valore di $f(x)$ è minimo?
3. Risolvi l'equazione $f(x) = 2$ con tre cifre significative di precisione.

$$1. \int f(x) dx = \int 2^x - x dx = \frac{2^x}{\log_e 2} - \frac{x^2}{2} + C$$

2. Il grafico di $f(x)$ è approssimativamente



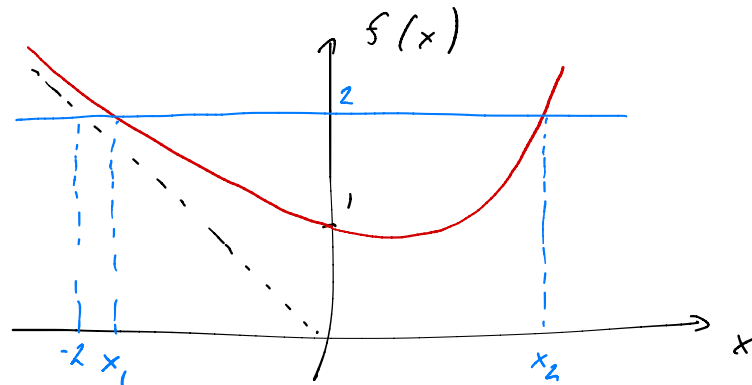
Quindi il valore x_{min} cercato soddisfa

$$f'(x_{min}) = 0$$

$$2^{x_{min}} \log_e(2) - 1 = 0$$

$$\boxed{x_{min} = -\log_2(\log_e(2))} = \boxed{-\frac{\log_e(\log_e(2))}{\log_e(2)}} \quad \begin{matrix} 0.53 \\ \text{ss} \end{matrix}$$

3. Riprendendo il grafico di $f(x)$ vediamo che devono esserci due soluzioni:



Vediamo che $x_2 = 2$, infatti $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.

Per quanto riguarda x_1 , si vede dal grafico che $-2 < x_1 < 0$. Procedendo per bisezione si arriva a: $f(-1.69) \approx 1.99993 < 2$, $f(-1.695) \approx 2.004 > 2$.

Quindi $x_1 \approx -1.69$.

ESERCIZIO E

Risolvi l'equazione differenziale

$$f''(x) = 4f'(x) - 4f(x)$$

Scrivendo, provvisoriamente, $f(x) = e^{\lambda x}$ abbiamo

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} = 4 \lambda \cancel{e^{\lambda x}} - 4 \cancel{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 = 4\lambda - 4$$

Che ha la sola soluzione $\lambda = 2$ con discriminante $\Delta = 0$. La soluzione generale dell'equazione data è

$$f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

ESERCIZIO F

Un mazzo di carte, tutte diverse fra loro, viene mescolato casualmente. La probabilità che l'asso di picche sia una delle prime due carte è del 5%. Calcola il numero di carte del mazzo. Qual è la probabilità che l'asso di picche sia una delle prime due carte condizionata all'evento che esso sia una delle prime cinque?

Se il mazzo contiene N carte, la probabilità che l'asso di picche sia una delle prime 2 è $\frac{2}{N}$.
Abbiamo quindi $\frac{2}{N} = 0.05$, da cui $N = 40$.
Sapendo che l'asso di picche è una delle prime 5 carte, esso compare fra le prime 2 con probabilità $\frac{2}{5} = 0.4$.