

Soluzioni dell'esame scritto del 24.VI.2020

Il compito di ogni studente era leggermente diverso dagli altri. Vediamo le soluzioni di uno dei possibili compiti.

ESERCIZIO A

Calcola (2 pt. ciascuna):

1. La derivata di $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;
2. Una primitiva di $g(x) = \sin(x) \cos(x) + 2^x$;
3. $\int_{-1}^2 \sin(\pi x) dx$.

1. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

2. $\int \sin(x) \cos(x) + 2^x dx =$

$$= \int \sin(x) \cos(x) dx + \int 2^x dx =$$

$\downarrow$ p. 181 delle note

$\downarrow$ p. 178 delle note

INTEGRALI
VISTI A
LEZIONE

$$= -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{2^x}{\log_e(2)} + C$$

Quindi, per esempio, $F(x) = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{2^x}{\log_e(2)}$ è una primitiva di $f(x)$.

3. $\int \sin(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x)$

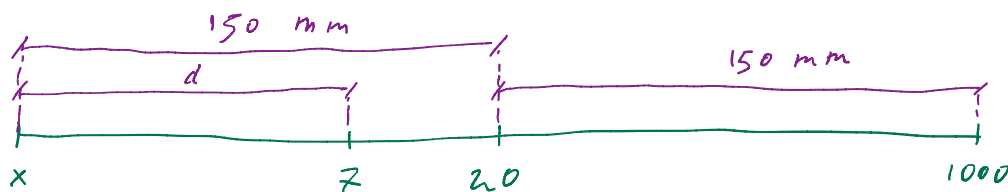
di conseguenza

$$\int_{-1}^2 \sin(\pi x) dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_{-1}^2 = -\frac{1}{\pi} \cos(2\pi) + \frac{1}{\pi} \cos(\pi) = -\frac{2}{\pi}$$

ESERCIZIO B

Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala (3 pt.)? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7 (3 pt.)?

La situazione è come rappresentato in figura



L'esercizio chiede il numero x e la distanza d .

Per x abbiamo la seguente proporzione

$$\log_{10}(1000) - \log_{10}(20) : 150 \text{ mm} = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

Da cui calcoliamo

$$\underbrace{(\log_{10}(1000) - \log_{10}(20))}_{\log_{10} \frac{1000}{20}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}} = \underbrace{(\log_{10}(20) - \log_{10}(x))}_{\log_{10} \frac{20}{x}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}}$$

$$\log_{10} \frac{1000}{20} = \log_{10} \frac{20}{x} \Rightarrow \frac{1000}{20} = \frac{20}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20 \cdot 20}{1000} = 0.4}$$

Per d abbiamo

$$\log_{10}(7) - \log_{10}(x) : d = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

$$\boxed{d} = \frac{\log_{10}(7) - \log_{10}(0.4)}{\log_{10}(20) - \log_{10}(0.4)} \cdot 150 \text{ mm} \approx \boxed{110 \text{ mm}}$$

ESERCIZIO C

Una coltura di batteri cresce esponenzialmente. Si è stabilito che ad un certo tempo essa è costituita da $(6.1 \pm 0.1) 10^6$ individui. Dopo esattamente ventiquattro ore, il numero di individui è $(7.9 \pm 0.1) 10^{10}$. Ogni quanto tempo la coltura raddoppia (3 pt.)? Che incertezza relativa hai su questo risultato (3 pt.)?

Il numero di batteri al tempo t è $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$
dove $N_0 = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6$ e τ è il tempo richiesto.

Quindi:

$$(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{10} = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}}$$
$$2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}} = \frac{7.9 \pm 0.1}{6.1 \pm 0.1} \cdot 10^4 = 1.2951 \cdot 10^4 \pm 2.91\%$$

$\leftarrow \pm 1.27\%$
 $\leftarrow \pm 1.64\%$

$$= (1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4$$

$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{\log_2((1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4)} \quad \text{Chiamiamo questo } D$$

Ora possiamo procedere calcolando l'intervallo di incertezza del denominatore D .

$$\log_2((1.2951 - 0.0376) \cdot 10^4) \leq D \leq \log_2((1.2951 + 0.0376) \cdot 10^4)$$
$$13.618 \leq D \leq 13.702$$

Di conseguenza $D = 13.661 \pm 0.042$ e

$\leftarrow \log_2(1.2951 \cdot 10^4)$

$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{13.661 \pm 0.042} = 105.4 \pm 0.3\% \text{ min}$$

$\leftarrow \pm 0.31\%$

Nota: l'accuratezza di questo risultato NON è realistica, nella realtà i dati sono meno precisi, e la crescita non è esattamente esponenziale.

ESERCIZIO D

Considera la funzione $f(x) = \sin(\arctan(x))$. Calcola le seguenti quantità, in modo esatto se puoi, altrimenti in maniera approssimata (3 pt. ciascuna).

1. La soluzione positiva dell'equazione $2x = 3f(x)$ – con almeno tre cifre significative.
2. L'integrale definito $\int_0^1 f(x) dx$.

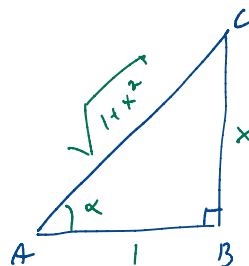
Questo esercizio, usando le nozioni del corso, si può risolvere sia in maniera esatta, sia in modo approssimato. La soluzione esatta necessita, però, di un livello di sofisticazione nell'uso delle tecniche superiore a quanto si richiede per questo esame.

Per completezza, vediamo entrambi i metodi.

Metodo esatto

Se $\alpha = \arctan(x)$, come rappresentato in Figura, vediamo che

$$f(x) = \sin(\arctan(x)) = \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



$$1. \quad 2x = 3f(x) \Leftrightarrow 2x = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4}$$

la semplificazione è valida perché cerchiamo la soluzione positiva.

Quindi $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ perché si richiede la soluzione positiva.

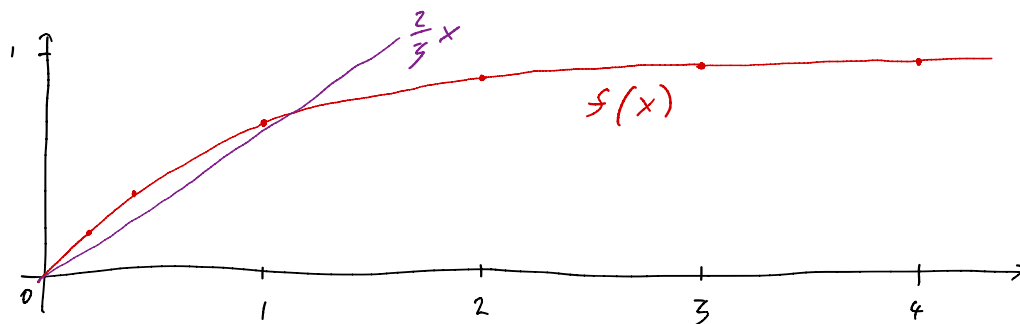
$$2. \quad \int f(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{y} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

$\hookrightarrow y = 1+x^2 \hookrightarrow$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

Metodo approssimato

1.



L'equazione data equivale a $f(x) = \frac{2}{3}x$.

Da un grafico si vede che ci deve essere una soluzione per x fra 1 e 1.2. Procedendo poi per bisezione

$$f(1) - \frac{2}{3} \cdot 1 \approx 0.04 > 0 \quad f(1.2) - \frac{2}{3} \cdot 1.2 \approx -0.03 < 0$$

$$f(1.1) - \frac{2}{3} \cdot 1.1 \approx 0.007 > 0$$

$$f(1.15) - \frac{2}{3} \cdot 1.15 \approx -0.01 < 0$$

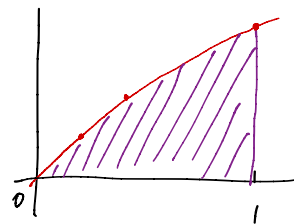
$$f(1.12) - \frac{2}{3} \cdot 1.12 \approx -0.0007 < 0$$

$$f(1.115) - \frac{2}{3} \cdot 1.115 \approx 0.001 > 0$$

Quindi x è fra 1.115 e 1.12, e, con tre cifre significative di precisione, $x = 1.12$.

Nota: il valore esatto è $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.11803...$

2. Se usiamo il metodo dei trapezi, dividendo l'area in 5 trapezi, otteniamo



$$\int_0^1 f(x) dx \approx 0.2 \left(\frac{f(0)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + \frac{f(1)}{2} \right) \approx 0.41$$

0 0.1961 0.3714 0.5145 0.6247 0.3536

Nota: il valore esatto è $\sqrt{2} - 1 = 0.41421...$

ESERCIZIO E

Trova la soluzione generale dell'equazione differenziale $f'(x) = 4x^3 f(x)$.

Questa è un'equazione a variabili separabili. Applicando il procedimento visto a lezione otteniamo

$$\frac{df}{dx} = 4x^3 f \Rightarrow \frac{df}{f} = 4x^3 dx \Rightarrow \int \frac{df}{f} = \int 4x^3 dx$$
$$\downarrow$$
$$\log_e(f) = x^4 + C$$

Per cui la soluzione generale è $\boxed{f(x) = k \cdot e^{x^4}}$

ESERCIZIO F

Sono date due variabili aleatorie indipendenti X e Y . Entrambe possono assumere unicamente i valori 1 e 9. Sappiamo che $E(X) = 3$ e $E(Y) = 4$. Calcola la probabilità dell'evento $X \leq Y$.

Sappiamo che

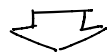
$$\begin{cases} 1 \cdot p_X(1) + 9 \cdot p_X(9) = E(X) = 3 \\ p_X(1) + p_X(9) = 1 \end{cases}$$

Questo è un sistema di due equazioni nelle incognite $p_X(1)$ e $p_X(9)$. Risolvendo il sistema, otteniamo

$$p_X(1) = \frac{3}{4} \quad p_X(9) = \frac{1}{4}$$

Procedendo nella stessa maniera per Y abbiamo

$$\begin{cases} 1 \cdot p_Y(1) + 9 \cdot p_Y(9) = E(Y) = 4 \\ p_Y(1) + p_Y(9) = 1 \end{cases}$$



$$p_Y(1) = \frac{5}{8} \quad p_Y(9) = \frac{3}{8}$$

Conviene ora considerare i quattro casi possibili:

	$X=1$		$X=9$	
$Y=1$	$\left \begin{array}{l} \Pr(X=1 \cap Y=1) = p_X(1) \cdot p_Y(1) \\ X \leq Y \end{array} \right $		$\left \begin{array}{l} \Pr(X=9 \cap Y=1) = p_X(9) \cdot p_Y(1) \\ X > Y \end{array} \right $	
$Y=9$	$\left \begin{array}{l} \Pr(X=1 \cap Y=9) = p_X(1) \cdot p_Y(9) \\ X \leq Y \end{array} \right $		$\left \begin{array}{l} \Pr(X=9 \cap Y=9) = p_X(9) \cdot p_Y(9) \\ X \leq Y \end{array} \right $	

Possiamo calcolare la probabilità richiesta sia sommando le probabilità dei tre casi in cui $X \leq Y$, sia, più rapidamente, sottraendo da 1 la probabilità dell'evento complementare $X > Y$. Seguendo quest'ultima via otteniamo

$$\begin{aligned} \boxed{\Pr(X \leq Y)} &= 1 - \Pr(X > Y) \\ &= 1 - \Pr(X=9 \cap Y=1) \\ &= 1 - p_X(9) \cdot p_Y(1) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \boxed{\frac{27}{32}} \end{aligned}$$