

Soluzioni dell'esame scritto del 20.VII.2020

Il compito di ogni studente era leggermente diverso dagli altri. Vediamo le soluzioni di uno dei possibili compiti.

ESERCIZIO A

Trova:

1. un polinomio di primo grado $f(x)$ tale che $f(1) = 2$ e $f(0) = 7$;
2. una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(2) = 10^6$ e $g(4) = 3 \cdot 10^4$;
3. il minimo valore assunto dalla funzione $h(x) = 2x^4 - x$.

1. Un generico polinomio di primo grado è della forma $f(x) = ax + b$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(0) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b = 2 \\ a \cdot 0 + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = -5$$

$$\boxed{f(x) = -5x + 7}$$

2. Un generico esponenziale è della forma $g(x) = a \cdot b^x$

$$\begin{cases} g(2) = 10^6 \\ g(4) = 3 \cdot 10^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b^2 = 10^6 \\ a \cdot b^4 = 3 \cdot 10^4 \end{cases} \Rightarrow b^2 = \frac{a \cdot b^4}{a \cdot b^2} = \frac{3 \cdot 10^4}{10^6} = 3 \cdot 10^{-2}$$

Quindi:

$$b = \sqrt{3 \cdot 10^{-2}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \quad a = \frac{a \cdot b^2}{b^2} = \frac{10^6}{3 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{3} 10^8$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{3} 10^8 \left(\frac{\sqrt{3}}{10} \right)^x}$$

3. La derivata di b è $b'(x) = 8x^3 - 1$ e si annulla in $x_0 = \frac{1}{2}$.

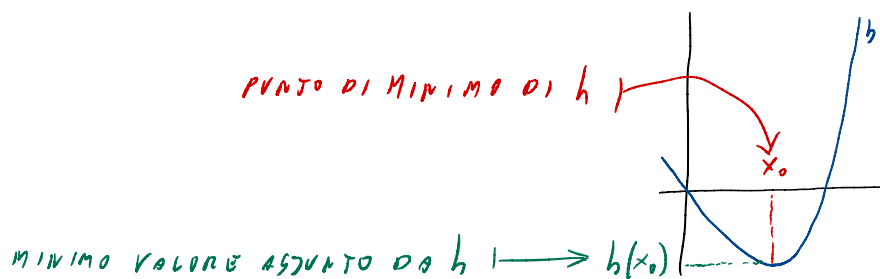
Per $x < x_0$, b' è negativa, mentre per $x > x_0$, b' è positiva, la

funzione $h(x)$ assume quindi il minimo valore in $x=x_0$, e qui vale

$$h(x_0) = h\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-\frac{3}{8}\right]$$

Nota importante

Non bisogna confondere il punto di minimo x_0 con il minimo valore assunto dalla funzione $h(x_0)$. Il primo sta sull'asse delle ascisse, il secondo sull'asse delle ordinate in un diagramma di h .



ESERCIZIO B

Una certa linea elettrica, quando trasporta 1 GW di potenza, ne disperde il 5% ogni 100 km della sua lunghezza. In generale, la potenza dispersa per unità di lunghezza della linea è proporzionale al quadrato di quella trasmessa. Sapendo che la linea è lunga 200 km e trasporta 700 MW, supponendo che la corrente elettrica, all'ingrosso, costi 5 centesimi di euro al $\text{kW} \cdot \text{h}$, calcola la spesa per l'energia dispersa dalla linea ogni minuto (in euro e centesimi di euro).

L'esercizio parla di *potenza dispersa per unità di lunghezza* e questo ci dice che la potenza dispersa è direttamente proporzionale alla lunghezza della linea $p. \text{ dispersa} = A \cdot \text{lunghezza}$. Precisamente, il testo dice che il fattore A è proporzionale al quadrato della potenza trasmessa $A = B \cdot (p. \text{ trasmessa})^2$. Quindi in definitiva

$$p. \text{ dispersa} = B \cdot (p. \text{ trasmessa})^2 \cdot \text{lunghezza}$$

La prima frase del testo dice che, se $p_{\text{trasmessa}} = 1 \text{ kW}$, allora la linea dissipa 50 MW ogni 100 km

$$p_{\text{trasmessa}} = 1 \text{ kW} \Rightarrow \underbrace{p_{\text{dissipata}} : \text{lunghezza}} = 50 \text{ MW} : 100 \text{ km}$$
$$p_{\text{dissipata}} = \frac{50 \text{ MW}}{100 \text{ km}} \cdot \text{lunghezza}$$

Questo ci permette di determinare B

$$B \cdot (1 \text{ kW})^2 \cdot \cancel{\text{lunghezza}} = \frac{50 \text{ MW}}{100 \text{ km}} \cdot \cancel{\text{lunghezza}}$$

$$B = \frac{50 \text{ MW}}{(1 \text{ kW})^2 \cdot 100 \text{ km}}$$

Ora inseriamo nella formula i dati della linea che ci interessa: 200 km e 700 MW , per calcolarne la potenza dissipata

$$p_{\text{dissipata}} = \frac{50 \text{ MW}}{(1 \text{ kW})^2 \cdot 100 \text{ km}} \cdot (700 \text{ MW})^2 \cdot 200 \text{ km} = 49 \text{ MW}$$

La domanda è ora: *che spesa impone ogni minuto una perdita di 49 MW di potenza?* Per cominciare, l'energia dissipata in un minuto è $\text{energia dissipata} = 49 \text{ MW} \cdot 1 \text{ min}$. Il costo di questa energia si calcola, secondo il testo, mediante la proporzione:

$$\text{costo} : \text{energia dissipata} = 0.05 \text{ €} : 1 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Quindi

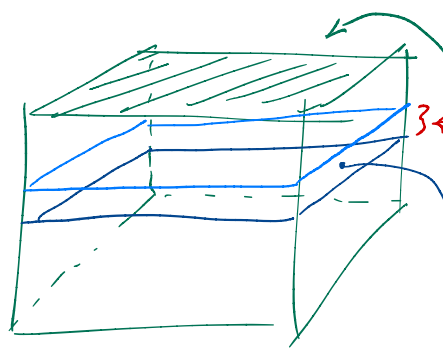
$$\text{costo} = \frac{49 \text{ MW} \cdot 1 \text{ min} \cdot 0.05 \text{ €}}{1 \text{ kW} \cdot \text{h}} = \frac{49 \cdot 10^3 \cancel{\text{ kW}} \cdot 1 \cancel{\text{ min}} \cdot 0.05 \text{ €}}{1 \cancel{\text{ kW}} \cdot 60 \cancel{\text{ min}}} \approx 40.83 \text{ €}$$

ESERCIZIO C

Una piscina olimpionica è larga 25.0 m e lunga 50.0 m, con un'incertezza del 2% su entrambe le misure. In essa vengono introdotti sette elefanti del peso totale di 27 ± 1 tonnellate, che giocano a pallanuoto (usando un pallone di peso trascurabile) senza toccare il fondo. Di quanti millimetri si alza il livello della piscina, supponendo che il peso specifico dell'acqua sia di esattamente 1 kg dm^{-3} ? (Indica l'incertezza assoluta.)

Nota: per il principio di Archimede il peso di un corpo galleggiante è pari al peso dell'acqua che riempirebbe il volume immerso del corpo.

Per il principio di Archimede, l'esercizio chiede, in maniera un po' buffa di quanto si alza il livello della piscina aggiungendo 27 ± 1 tonnellate d'acqua.



superficie = $(25 \pm 2\%) \text{ m} \cdot (50 \pm 2\%) \text{ m} = (1250 \pm 4\%) \text{ m}^2$

innalzamento

volume aggiunto = superficie · innalzamento

$$\text{innalzamento} = \frac{\text{volume aggiunto}}{\text{superficie}} = \frac{\text{volume aggiunto}}{(1250 \pm 4\%) \text{ m}^2}$$

Possiamo ricavare l'innalzamento dal volume di acqua aggiunta, e questo dal peso dell'acqua aggiunta usando il peso specifico

$$\text{volume aggiunto} = \frac{(27 \pm 1) \cdot 10^3 \text{ kg}}{1 \text{ dm} \cdot \text{kg}^{-1}} = (27 \pm 1) \text{ m}^3$$

Quindi:

$$\text{innalzamento} = \frac{(27 \pm 1) \text{ m}^3}{(1250 \pm 4\%) \text{ m}^2} = (21.6 \pm 7.7\%) \text{ mm} = \boxed{(21.6 \pm 1.7) \text{ mm}}$$

ESERCIZIO D

Che punto della retta $x + 2y = 4$ si trova alla minima distanza dall'origine?

Ricavando $y = \frac{4-x}{2}$ vediamo che un generico punto della retta data è della forma $(x, \frac{4-x}{2})$.

La distanza di questo punto dall'origine vale

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4-x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - 2x + 4}$$

Per trovare il punto più vicino all'origine, dobbiamo trovare il valore di x che rende minima questa distanza. Possiamo semplificare il ragionamento osservando che rendere minima $\sqrt{\text{qualcosa}}$ equivale a rendere minimo il radicando, per cui cerchiamo in che valore di x sia minima la quantità $(d(x))^2 = \frac{5}{4}x^2 - 2x + 4$

Questo è un polinomio di secondo grado — una parabola con concavità rivolta verso l'alto — il cui vertice si trova in $x_v = \frac{-(-2)}{2 \cdot 5/4} = 0.8$. Il punto cercato è quindi $(0.8, 1.6)$

ESERCIZIO E

Trova un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti che abbia la soluzione particolare $f(x) = 2^x + 9$. (Scrivi i coefficienti in forma numerica con esattamente cinque cifre significative di precisione, correttamente approssimate).

In generale un'equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti ha la forma $f'(x) = a f(x) + b$. Noi dobbiamo

i coefficienti a e b in modo tale che $f(x) = 2^x + 9$ soddisfi questa equazione. Sostituiamo f nell'equazione con la sua espressione

$$(2^x + 9)' = a \cdot (2^x + 9) + b$$

$$2^x \log_e 2 = a \cdot 2^x + a \cdot 9 + b$$

$$2^x (\log_e 2 - a) = a \cdot 9 + b$$

Se ora scegliamo a e b in modo tale che $\log_e 2 - a = 0$ e $a \cdot 9 + b = 0$, l'equazione precedente si riduce a $0 = 0$, che è ovviamente soddisfatta.

$$\begin{cases} \log_e 2 - a = 0 \\ a \cdot 9 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \log_e 2 \\ b = -9 \log_e 2 \end{cases}$$

In definitiva, l'equazione $f' = (\log_e 2) f - 9 \log_e 2$ ammette la soluzione particolare richiesta.

Soluzione alternativa Noi sappiamo che la soluzione generale dell'equazione $f'(x) = a f(x) + b$ è $f(x) = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$.

Desideriamo quindi

$$C e^{ax} - \frac{b}{a} = 2^x + 9$$

Osservando che $e^{ax} = (e^a)^x$ ci basta chiedere che valga

$$\begin{cases} C = 1 \\ e^a = 2 \Rightarrow a = \log_e 2 \\ -\frac{b}{a} = 9 \Rightarrow \frac{-b}{\log_e 2} = 9 \Rightarrow b = -9 \log_e 2 \end{cases}$$

E abbiamo trovato gli stessi coefficienti di prima.

ESERCIZIO F

Si mettono in un'urna quattro palle da biliardo numerate dall'uno al quattro. Se ne estraggono quindi due, scelte a caso così che tutte le coppie abbiano la medesima probabilità. Il minore dei due numeri estratti è l'ora di inizio di una buffa solennità, il maggiore l'ora in cui termina. Che probabilità c'è che questa solennità sia in corso alle ore due e trenta minuti? Quale è il valore atteso della durata della solennità (in minuti)?

Lo spazio di tutte le estrazioni possibili non contiene che pochi casi, possiamo quindi esaminarli tutti.

Estrazioni possibili	Probabilità	In corso alle 2:30	Durata [h]
1 2	$\frac{1}{6}$	X	1
1 3	$\frac{1}{6}$	✓	2
1 4	$\frac{1}{6}$	✓	3
2 3	$\frac{1}{6}$	✓	1
2 4	$\frac{1}{6}$	✓	2
3 4	$\frac{1}{6}$	X	1

Ω

$$Pr \left(\begin{array}{c} \text{In corso} \\ \text{alle 2:30} \end{array} \right) = \frac{4}{6}$$

La durata può essere di 1, 2, o 3 ore con la legge seguente

durata	1h	2h	3h
Probabilità	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Il valore atteso è quindi

$$E[\text{durata}] = \frac{3}{6} \cdot 1h + \frac{2}{6} \cdot 2h + \frac{1}{6} \cdot 3h = \frac{10}{6} h = \boxed{100 \text{ min}}$$