

Soluzioni dell'esame scritto del 20.11.2020

Il compito di ogni studente era leggermente diverso dagli altri. Vediamo le soluzioni di uno dei possibili compiti.

ESERCIZIO A

Calcola:

1. la derivata seconda della funzione $f(x) = \sin(2x) \cos(2x)$;
2. una primitiva della funzione $g(x) = e^{2x} + \cos(2x)$;
3. il valore della seguente sommatoria $\sum_{i=-1}^4 i$.

1. $f(x) = \sin(2x) \cos(2x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cos(2x) \cos(2x) - 2 \sin(2x) \sin(2x) \\ &= 2 (\cos(2x))^2 - 2 (\sin(2x))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -8 \cos(2x) \sin(2x) - 8 \sin(2x) \cos(2x) \\ &= \boxed{-16 \sin(2x) \cos(2x)} \end{aligned}$$

2. $\int e^{2x} + \cos(2x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \sin(2x) + C$

Una primitiva è quindi

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} \sin(2x)}$$

3. $\sum_{i=-1}^4 i = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \boxed{9}$

ESERCIZIO B

Considera una funzione esponenziale $f(x)$ tale che $f(0) = 1$ e $f(10) = 5$.
Calcola $\int_2^8 f(x) dx$.

In generale f è della forma $f(x) = a \cdot e^{cx}$ e le condizioni richieste equivalgono al seguente sistema

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(10) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot e^{\overbrace{c \cdot 0}^{=1}} = 1 \Rightarrow a = 1 \\ a \cdot e^{c \cdot 10} = 5 \Rightarrow e^{c \cdot 10} = 5 \Rightarrow c = \frac{\log_e 5}{10} \end{cases}$$

Dunque $f(x) = e^{\frac{\log_e 5}{10} x}$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int e^{\frac{\log_e 5}{10} x} dx = \frac{10}{\log_e 5} e^{\frac{\log_e 5}{10} x} + C \\ &= \frac{10}{\log_e 5} 5^{\frac{x}{10}} + C \end{aligned}$$

$$\int_2^8 f(x) dx = \left[\frac{10}{\log_e 5} 5^{\frac{x}{10}} \right]_2^8 = \frac{10}{\log_e 5} \left(5^{0.8} - 5^{0.2} \right) \approx 13.94$$

ESERCIZIO C

La lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è stata misurata in metri 2.45 ± 0.01 . La lunghezza di uno dei cateti è metri 1.34 ± 0.01 . Determina la misura dell'area del triangolo e calcola l'incertezza relativa su questo valore.

Dati: a il cateto noto

b il cateto ignoto

c l'ipotenusa

A l'area del triangolo

Possiamo calcolare

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad A = \frac{1}{2} a b = \frac{1}{2} a \sqrt{c^2 - a^2}$$

Se come A dipende da a e c in maniera complessa conviene calcolarla negli estremi degli intervalli di incertezza

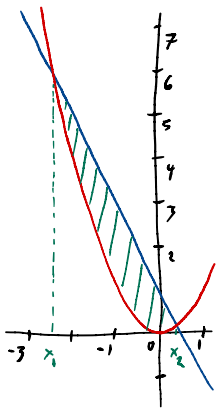
a	c	A
$1.34 + 0.01$	$2.45 + 0.01$	$1.3881 \leftarrow \text{max}$
$1.34 + 0.01$	$2.45 - 0.01$	1.3719
$1.34 - 0.01$	$2.45 + 0.01$	1.3762
$1.34 - 0.01$	$2.45 - 0.01$	$1.3604 \leftarrow \text{min}$
1.34	2.45	1.3742

Quindi

$$A = 1.3742 \pm \frac{\overset{\text{max}}{1.3881} - \overset{\text{min}}{1.3604}}{2} = 1.374 \pm 0.014 = \boxed{1.374 \pm 1.0\%}$$

ESERCIZIO D

Calcola l'area della regione di piano compresa fra la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta passante per il punto $x = 0, y = 1$ avente coefficiente angolare -2 .



La forma di una retta con coefficiente angolare -2 è $y = -2x + b$ e sapendo che passa per $(0, 1)$ abbiamo $1 = -2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$. L'equazione della retta è quindi $y = 1 - 2x$. Per trovare i punti di intersezione fra retta e parabola risolviamo

$$x^2 = 1 - 2x \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} - 1 \\ x_2 = -\sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Si tratta quindi di calcolare

$$\int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} (1 - 2x) dx - \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} x^2 dx = \left[x - x^2 \right]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}$$

$$= \boxed{\frac{8}{3} \sqrt{2}} \quad \approx \boxed{3.77}$$

Esercizio E

Trova un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che abbia la soluzione generale $f(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

La forma generale dell'equazione è $f'' = a \cdot f' + b \cdot f + c$

Calcoliamo le derivate di f

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x \\ &= (C_1 + C_2) e^x + C_2 x e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (C_1 + C_2) e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x \\ &= (C_1 + 2C_2) e^x + C_2 x e^x \end{aligned}$$

Una rimpiazziamo f, f', f'' nell'equazione con le relative espressioni:

$$f''(x) = a f'(x) + b f(x) + c$$

$$\underbrace{(C_1 + 2C_2) e^x + C_2 x e^x}_{f''(x)} = \underbrace{a(C_1 + C_2) e^x + a C_2 x e^x}_{a f'(x)} + \underbrace{b C_1 e^x + b C_2 x e^x}_{b f(x)} + c$$

$$\underbrace{(C_1 + 2C_2 - a C_1 - a C_2 - b C_1) e^x}_{C_1(1-a-b) + C_2(2-a)} + \underbrace{(C_2 - a C_2 - b C_2) x e^x}_{C_2(1-a-b)} - c = 0$$

Questa equazione deve ridursi a $0=0$ qualunque siano x, C_1 e C_2 , condizione che possiamo garantire se

$$\begin{cases} c = 0 \\ 1 - a - b = 0 \\ 2 - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi l'equazione $\boxed{f'' = 2f' - f}$

Altro modo

La forma generale dell'equazione è $f'' = a \cdot f' + b \cdot f + c$

Esaminando la soluzione $f(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$ vediamo che ci troviamo nel caso $\Delta = 0$ del procedimento risolutivo, l'equazione di secondo grado associata $\alpha^2 - a\alpha - b = 0$ ha quindi soluzione 1, perché $f(x) = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 x e^{1 \cdot x}$, e discriminante nullo

$$\begin{cases} 1^2 - a \cdot 1 - b = 0 & \leftarrow \text{s.l. 1} \Rightarrow b = 1 - a \Rightarrow b = -1 \\ a^2 + 4b = 0 & \leftarrow \Delta = 0 \Rightarrow a^2 + 4 - 4a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Siccome $f(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 0$ siamo nel caso $c = 0$, per cui l'equazione è $[f'' = 2f' - f]$

ESERCIZIO F

Una variabile aleatoria X può assumere i valori 1, 2, 3. Sappiamo che il valore atteso di X è 1.7, mentre la varianza 0.7. Determina la probabilità dell'evento $X \neq 2$.

La legge di X ha la forma generale
e le probabilità a, b, c soddisfano:

X	1	2	3
p_x	a	b	c

$$\begin{cases} a + b + c = 1 & \leftarrow \text{vera sempre} \\ 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = E(X) = 1.7 \\ 1^2 \cdot a + 2^2 \cdot b + 3^2 \cdot c = \text{Var}(X) + (E(X))^2 = 0.7 + 1.7^2 = 3.59 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema seguente

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a + 2b + 3c = 1.7 \\ a + 4b + 9c = 3.59 \end{cases}$$

Ricavando $a = 1 - b - c$ dalla prima e sostituendo nelle altre due equazioni:

$$\begin{cases} b + 2c = 0.7 \Rightarrow b = 0.7 - 2c \\ 3b + 8c = 2.59 \Rightarrow 2.1 - 6c + 8c = 2.59 \Rightarrow c = 0.245 \end{cases}$$

Ricavando b da c , e poi a da b e c , abbiamo la legge

X	1	2	3
p_x	0.545	0.21	0.245

Data questa legge, è facile calcolare la probabilità richiesta

$$P_n(X \neq 2) = P_n(\{X=1\} \cup \{X=3\}) = p_x(1) + p_x(3) = \boxed{0.79}$$