

Soluzioni dell'esame scritto del 20.VII.2020

Il compito di ogni studente era leggermente diverso dagli altri. Vediamo le soluzioni di uno dei possibili compiti.

ESERCIZIO A

Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali, trova la soluzione particolare che soddisfa la condizione $f(0) = 1$ (2 pt. per equazione):

$$\underbrace{f'(x) = \sin(2x)}_1; \quad \underbrace{f'(x) = 3f(x) + 3}_2; \quad \underbrace{f'(x) = x^2 f(x)}_3$$

1. Questo è un semplice integrale indefinito

$$f(x) = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C$$

Ora dobbiamo scegliere C

$$f(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \underbrace{\cos(2 \cdot 0)}_{\cos(0)=1} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$$

La soluzione cercata è quindi: $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(x)$

2. Questa è un'equazione lineare a coefficienti costanti

equazione omogenea: $f'(x) = 3f(x)$

soluzione dell'omogenea: $f(x) = C \cdot e^{3x}$

soluzione particolare: $f(x) = -1$

soluzione generale: $f(x) = C \cdot e^{3x} - 1$

Ora dobbiamo scegliere C

$$f(0) = 1 \Rightarrow C \cdot \underbrace{e^{3 \cdot 0}}_1 - 1 = 1 \Rightarrow C = 2$$

La soluzione cercata è quindi: $f(x) = 2e^{3x} - 1$

3. Questa è un'equazione a variabili separabili:

$$\frac{df}{dx} = x^2 \cdot f \Rightarrow \int \frac{df}{f} = \int x^2 dx \Rightarrow \log_e f = \frac{1}{3} x^3 + C$$

Abbiamo quindi la soluzione generale $f(x) = K \cdot e^{\frac{1}{3}x^3}$

Ora dobbiamo scegliere C

$$f(0) = 1 \Rightarrow K \cdot e^{\frac{1}{3}0^3} = 1 \Rightarrow K = 1$$

La soluzione cercata è quindi: $\boxed{f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}}$

ESERCIZIO B

Una popolazione cresce esponenzialmente fra un tempo t_0 e un tempo t_1 decuplicando ogni dieci giorni. Quindi, fra il tempo t_1 ed il tempo t_2 , decade esponenzialmente, con un tempo di dimezzamento di due giorni. Al tempo t_2 il numero di individui nella popolazione è pari a quello presente al tempo t_0 . Sapendo che fra t_0 e t_2 sono passati esattamente 5 giorni, calcola il tempo fra t_1 e t_2 indicando il risultato in giorni e ore, con le ore espresse alla prima cifra decimale correttamente arrotondata.

Indichiamo con $N(t)$ il numero di individui al tempo t .

Dal testo ricaviamo le seguenti relazioni:
per t fra t_0 e t_1 $N(t) = N(t_0) \cdot 10^{\frac{t-t_0}{10d}}$ dieci giorni decuplica
per t fra t_1 e t_2 $N(t) = N(t_1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-t_1}{2d}}$ due giorni dimezzamento

Valutando la prima in $t=t_1$ e la seconda in $t=t_2$ otteniamo

$$\underline{N(t_1)} = N(t_0) \cdot 10^{\frac{t_1-t_0}{10d}} \quad N(t_2) = \underline{N(t_1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2-t_1}{2d}}$$

Da cui, sostituendo $N(t_1)$

$$N(t_2) = N(t_0) \cdot 10^{\frac{t_1-t_0}{10d}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2-t_1}{2d}}$$

Adesso poniamo conto del dato che il numero di individui al tempo

t_2 è uguale al numero al tempo t_0 , ossia $N(t_2) = N(t_0)$

$$\cancel{N(t_0)} \cdot 10^{\frac{t_1 - t_0}{10d}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2 - t_1}{10d}} = \cancel{N(t_0)} \Rightarrow \underline{10^{\frac{t_1 - t_0}{10d}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2 - t_1}{2d}} = 1}$$

Ci conviene, ora, sfruttare le proprietà dell'esponenziale per portare questa equazione ad una forma più trattabile

$$\begin{aligned} 10^{\frac{t_1 - t_0}{10d}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_2 - t_1}{2d}} &= 1 \Rightarrow 10^{\frac{t_1 - t_0}{10d}} + \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{t_2 - t_1}{2d} = 1 \\ &\Downarrow \\ 10^{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{t_2 - t_1}{2d}} & \\ \underline{\frac{t_1 - t_0}{10d} + \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{t_2 - t_1}{2d} = 0} \end{aligned}$$

L'esercizio chiede $t_2 - t_1$, scriviamo quindi $x = t_2 - t_1$. Siccome fra t_2 e t_0 sono passati $5d$ abbiamo $t_1 - t_0 = 5d - x$. Da cui

$$\begin{aligned} \frac{5d - x}{10d} + \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \frac{x}{2d} &= 0 \\ \frac{1}{2} - x \left(\frac{1}{10d} - \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2d} \right) &= 0 \\ &\sim 0.250515 \\ x = 1.9959 d &= \boxed{1d \ 25.9h} \end{aligned}$$

ESERCIZIO C

Abbiamo un condotto a sezione circolare di diametro 200 ± 2 mm attraverso il quale scorre un liquido alla velocità di $0.7 \pm 2\%$ m/s. Calcola la portata del condotto in metri cubi all'ora (3 pt.), indicando l'errore assoluto (3 pt.).

Nel tempo t scorre attraverso il condotto un cilindro liquido avente area di base $\pi (100 \pm 2 \text{ mm})^2$ e altezza $t \cdot (0.7 \pm 2\% \frac{\text{m}}{\text{s}})$.

Abbiamo quindi:

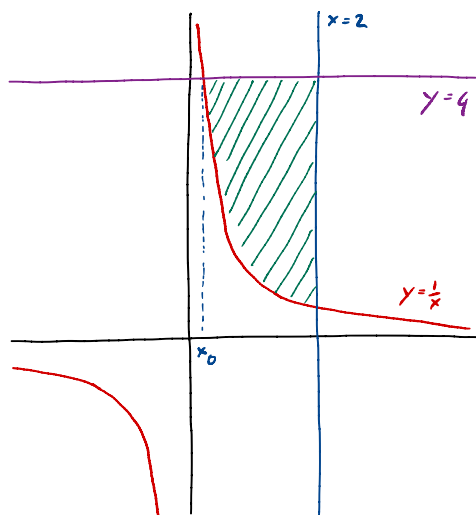
$$\text{portata} = \frac{\text{volume trasportato}}{\text{tempo}} = \frac{\pi (100 \pm 2 \text{ mm})^2 \cdot \cancel{t} \cdot (0.7 \pm 2\% \frac{\text{m}}{\text{s}})}{\cancel{t}}$$

$$= \pi (\underbrace{100 \pm 2 \text{ mm}}_{\pm 2\%})^2 \cdot (0.7 \pm 2\% \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 0.02199 \pm 6\% \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 79.17 \pm 6\% \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

$$\boxed{79 \pm 5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}}$$

ESERCIZIO D

Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra la retta $x = 2$, la retta $y = 4$, ed il grafico di $y = 1/x$.



L'unica regione limitata di piano che abbia come confini le curve $x=2$, $y=4$ e $y=\frac{1}{x}$ è quella rappresentata in figura, la cui area misura

$$A = \int_{x_0}^2 4 dx - \int_{x_0}^2 \frac{1}{x} dx$$

Possiamo ricavare x_0 dall'equazione $4 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$. Quindi

$$A = \int_{\frac{1}{4}}^2 4 dx - \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{1}{x} dx = \left[4x \right]_{\frac{1}{4}}^2 - \left[\log_e x \right]_{\frac{1}{4}}^2 = \boxed{7 - \log_e 8} \approx \boxed{4.92}$$

ESERCIZIO E

Determina possibilmente in forma algebrica (6pt.), altrimenti in forma numerica (3pt.), il massimo valore assunto dalla funzione $f(x) = \sin(x)(\cos(x))^5$ al variare di x fra 0 e $\pi/2$. Suggestimento: può servirti la formula che lega $(\sin(x))^2$ e $(\cos(x))^2$.

Troviamo, inizialmente, i punti stazionari di f .

$$f'(x) = (\cos x)^6 - 5 \underbrace{(\sin x)^2}_{1 - (\cos x)^2} (\cos x)^4 = 6 (\cos x)^6 - 5 (\cos x)^4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 (\cos x)^6 - 5 (\cos x)^4 = 0 \Rightarrow (\cos x)^4 (6 (\cos x)^2 - 5) = 0$$

$$\cos x = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \\ -\sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \pm \arccos\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + k\pi$$

$$x = \pm \arccos\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + k\pi$$

Gli unici punti stazionari fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ sono in $x = \frac{\pi}{2}$ e in $x = \arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$. Dobbiamo quindi valutare f in questi due punti e nell'estremo $x=0$

$$f(0) = \sin(0) (\cos(0))^5 = 0$$

$$f\left(\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}} \left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^5 = \frac{25\sqrt{5}}{216}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5 = 0$$

Quindi il minimo valore assunto è $\boxed{0}$ ed il massimo

$$\boxed{\frac{25\sqrt{5}}{216}}$$

$$\approx 0.2588$$

ESERCIZIO F

Un attore di Hollywood deve disinnescare una bomba tagliando tre fili elettrici nella giusta sequenza, che è stata scelta a caso, uniformemente, fra quelle possibili. Egli taglia: blu – marrone – rosso. Che probabilità c'è che la sequenza scelta sia quella giusta (2pt.)? Quale è il valore atteso del numero di tagli che l'attore riesce a portare a termine, supponendo che l'ordigno esploda al primo errore (2pt.)? Ora, gli viene detto che il filo blu non va tagliato per primo, e gli è offerta la possibilità di chiedere una delle seguenti informazioni: "quando va tagliato il filo marrone?" oppure "quale filo va tagliato per primo?". Che scelta conviene fare, e, fatta la scelta migliore, che probabilità ha l'attore di disinnescare il congegno.

Esaminiamo i casi possibili

Casi:	B M R	B R M	M B R	M R B	R B M	R M B
N. tagli:	3	2	1	1	1	1

I casi equiprobabili sono 6, quindi la probabilità che la sequenza scelta sia BMR è $\left[\frac{1}{6}\right]$ Il valore atteso del numero di tagli è

$$E(\text{numero di tagli}) = \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \boxed{1.5}$$

Supponiamo, infine, di sapere che la sequenza scelta a caso non inizia col filo blu. Ci troviamo quindi in uno dei quattro casi

M B R M R B R B M R M B

Se chiediamo quale filo vada tagliato per primo, le risposte possibili sono Marrone e Rosso, e, a ciascuna delle due risposte corrispondono due casi possibili. Ricevuta la risposta abbiamo allora il 50% di probabilità di indovinare.

Supponiamo, ora, di chiedere quando vada tagliato il marrone. Le risposte possibili sono per primo o per secondo o per terzo.

Se la risposta è *per secondo* o *per terzo*, sappiamo identificare con certezza la combinazione, mentre se la risposta è *per primo* abbiamo il 50% di probabilità di indovinare. In definitiva

Caso:	M B R	M R B	R B M	R M B
Pr. caso:	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Pr. di indovinare:	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

$$Pr(\text{indovinare}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0.75$$

Quindi conviene chiedere quando vada tagliato il marrone, e, così facendo, si disinnescia l'apparecchio col 75% di probabilità.