

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
RACCOLTA DI FORMULE UTILI

Le formule indicate con ♠ possono essere necessarie per superare il test e vanno sapute. Le altre non saranno necessarie per il test (sebbene potrebbero aiutare), e durante lo scritto è ammesso il ricorso ai testi (ad esempio a questo formulario), però bisogna saperle usare.

Attenzione: questo formulario è fornito come *aiuto per gli studenti* e non è un documento ufficiale. In particolare, non tutte le formule da sapere si trovano qui. Per esempio, è richiesta la padronanza dei programmi della scuola elementare e media.



Prodotti notevoli

$$\begin{array}{ll}
 \spadesuit (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \spadesuit (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
 (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 & (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
 \spadesuit a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) & a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
 & a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)
 \end{array}$$

L'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni se e solo se $b^2 - 4ac \geq 0$, e, in questo caso, le soluzioni soddisfano

$$\spadesuit x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Teoria degli errori

$$\begin{array}{ll}
 \spadesuit x_0 \pm \delta x = x_0 \pm \frac{\delta x \cdot 100}{x_0} \% & \spadesuit x_0 \pm \alpha \% = x_0 \pm \frac{\alpha \cdot x_0}{100} \\
 \spadesuit (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y) = x_0 + y_0 \pm (\delta x + \delta y) & \\
 \spadesuit (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y) = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y) & \\
 \spadesuit (x_0 \pm \alpha \%) \cdot (y_0 \pm \beta \%) = x_0 \cdot y_0 \pm (\alpha + \beta) \% & \\
 \spadesuit \frac{x_0 \pm \alpha \%}{y_0 \pm \beta \%} = \frac{x_0}{y_0} \pm (\alpha + \beta) \% &
 \end{array}$$

Data una serie di misure $x_1, x_2, \dots, x_n$ si stima $x = \bar{x} \pm \delta x$ mediante le formule

$$\spadesuit \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Il vertice della parabola $y = ax^2 + bx + c$ si trova in (x_v, y_v) con

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad y_v = c - \frac{b^2}{4a}$$

La retta passante per (x_1, y_1) e (x_2, y_2) ha equazione $y = ax + b$ con

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad b = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

(Nota: queste formule non vanno sapute a memoria, però bisogna saper calcolare la retta per due punti, ad esempio, risolvendo il sistema.)

Proprietà dell'esponenziale

$$\begin{aligned} \spadesuit b^0 &= 1 & \spadesuit b^x b^y &= b^{x+y} & \spadesuit x^a y^a &= (xy)^a & \spadesuit (b^x)^y &= b^{xy} \\ \spadesuit b^1 &= b & \spadesuit \frac{b^x}{b^y} &= b^{x-y} & \spadesuit \frac{x^a}{y^a} &= \left(\frac{x}{y}\right)^a & \spadesuit b^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{b} \\ \spadesuit 1^a &= 1 \end{aligned}$$

Proprietà del logaritmo

$$\begin{aligned} \spadesuit \log_b(1) &= 0 & \spadesuit \log_b(xy) &= \log_b(x) + \log_b(y) & \spadesuit \log_b(x^y) &= y \log_b(x) \\ \spadesuit \log_b(b) &= 1 & \spadesuit \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) & \spadesuit \log_b(\sqrt[n]{x}) &= \frac{\log_b(x)}{n} \end{aligned}$$

Formula per il cambiamento di base dei logaritmi

$$\spadesuit \log_x(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}$$

Formule trigonometriche

$$\begin{aligned} \spadesuit \tan(x) &= \sin(x)/\cos(x) & \spadesuit 1 &= (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) & \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) & \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) & \cos(2x) &= 2(\cos(x))^2 - 1 \end{aligned}$$

Formula di interpolazione lineare per x fra x_1 e x_2 , con $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$

$$f(x) \approx (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + y_1$$

Derivate delle funzioni elementari

$$\begin{aligned} \spadesuit (\text{costante})' &= 0 & \spadesuit (x^k)' &= kx^{k-1} \\ \spadesuit (e^x)' &= e^x & \spadesuit (\log_e(x))' &= \frac{1}{x} \\ \spadesuit (b^x)' &= b^x \log_e(b) & \spadesuit (\log_b(x))' &= \frac{1}{x \log_e(b)} \\ \spadesuit (\sin(x))' &= \cos(x) & (\arcsin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \spadesuit (\cos(x))' &= -\sin(x) & (\arccos(x))' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\tan(x))' &= \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2 & (\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Regole di derivazione

$$\begin{aligned} \spadesuit (f + g)' &= f' + g' & \spadesuit (f - g)' &= f' - g' \\ \spadesuit (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' & \spadesuit \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ \spadesuit (f(g(x)))' &= g'(x) \cdot f'(g(x)) \end{aligned}$$

Integrali elementari

$$\begin{aligned} \spadesuit \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{per } \alpha \neq -1 \\ \spadesuit \int \frac{1}{x} dx &= \log_e(x) + C \\ \spadesuit \int \sin(x) dx &= -\cos(x) + C & \spadesuit \int \cos(x) dx &= \sin(x) + C \\ \spadesuit \int e^x dx &= e^x + C & \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Regole di integrazione (*convenzione: $\int f(x) dx = F(x) + C$ $\int g(x) dx = G(x) + C$*)

$$\begin{aligned} \spadesuit \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot F(x) + C \\ \spadesuit \int f(x) + g(x) dx &= F(x) + G(x) + C \\ \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= F(g(x)) + C \quad \text{Occhio: la } g \text{ dentro è minuscola.} \\ \spadesuit \int f(ax + b) dx &= \frac{1}{a} \cdot F(ax + b) + C \\ \int f(x) \cdot g(x) dx &= F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx \end{aligned}$$

Soluzione generale di $f'(x) = af(x) + b$ con $a \neq 0$

$$\spadesuit f(x) = e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Integrale definito (*convenzione: $\int f(x) dx = F(x) + C$*)

$$\spadesuit \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Formule insiemistiche ovvie

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C = A \cup B \cap C \\ A \cap B &= B \cap A & A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup C = A \cap B \cup C \end{aligned}$$

Formule insiemistiche non ovvie

$$\begin{aligned} \spadesuit \overline{\overline{A}} &= A \\ \spadesuit \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} & \spadesuit A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ \spadesuit \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} & \spadesuit A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Probabilità

$$\spadesuit \Pr(\emptyset) = 0$$

$$\spadesuit \Pr(\overline{A}) = 1 - \Pr(A)$$

$$\spadesuit \Pr(\Omega) = 1$$

$$\spadesuit \Pr(A \cup B) + \Pr(A \cap B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

Probabilità condizionata

$$\spadesuit \Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Se A e B sono eventi indipendenti

$$\spadesuit \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

$$\Pr(A|B) = \Pr(A)$$

$$\Pr(B|A) = \Pr(B)$$

Variabili aleatorie (*convenzione: $p_X(a) = \Pr(X = a)$ rappresenta la legge di X*)

$$\spadesuit E(X) = \sum_a a \cdot p_X(a)$$

$$\spadesuit \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$\spadesuit \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Somme e prodotti di variabili aleatorie (*convenzione: a e c sono costanti*)

$$\spadesuit E(c) = c$$

$$\spadesuit E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$$

$$\spadesuit E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\spadesuit \text{Var}(c) = 0 \quad \spadesuit \text{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

$$\sigma(c) = 0$$

$$\sigma(a \cdot X) = a \cdot \sigma(X)$$

(*si deducono dalle due precedenti*)

Variabili aleatorie indipendenti

$$\spadesuit E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\spadesuit \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Versione definitiva — 23 dicembre 2019