

Esercizi di algebra elementare

Semplifica le seguenti espressioni

A. $(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 - (a+b+c)^2$

B. $(x+1)^3 - ((x+3)x+3)x$

Risolvi le seguenti equazioni

C. $(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4 = 10x$

D. $x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$

E. Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7

Risolvi le seguenti disequazioni

F. $x^4 < x^3 + 2x^2$

G. $\frac{2}{x} \leq x + 1$

Soluzione es. A

$$\begin{aligned}(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2 - (a+b+c)^2 &= \\&= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 + 2ac + c^2) + (b^2 + 2bc + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \\&= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \\&= a^2 + b^2 + c^2\end{aligned}$$

Suggerimento: per controllare di non aver commesso errori, verifichiamo il calcolo con qualche facile sostituzione. Ad esempio $a = b = c = 1$ ci da

$$2^2 + 2^2 + 2^2 - 3^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$

Oppure $a = b = 1$ e $c = -1$ ci da

$$2^2 + 0^2 + 0^2 - 1^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2$$

Soluzione es. B

$$\begin{aligned}(x+1)^3 - ((x+3)x+3)x &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 3x + 3)x = \\&= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1\end{aligned}$$

Suggerimento: come prima conviene sostituire qualche numero al posto della x per verificare la correttezza dei conti.

Soluzione es. C

Semplificando l'equazione otteniamo

$$\begin{aligned}(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4 &= 10x \\(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 2x^4 &= 10x \\12x^2 + 2 &= 10x \\6x^2 + 1 &= 5x \\6x^2 - 5x + 1 &= 0 \\(3x-1)(2x-1) &= 0\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono $x = \frac{1}{3}$ e $x = \frac{1}{2}$.

Suggerimento: conviene controllare la correttezza delle soluzioni trovate sostituendole nella equazione. Per esempio, per $x = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{1}{3} + 1\right)^4 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^4 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} + \frac{16}{81} - \frac{2}{81} = \frac{270}{81} = \frac{10}{3} = 10\frac{1}{3}$$

Soluzione es. D

Osserviamo intanto che $x = 0$ non è una soluzione dell'equazione, perché sostituendo si ottiene una divisione per 0 che non ha senso. Possiamo quindi assumere $x \neq 0$. Siccome x non è nulla, otteniamo un'equazione equivalente moltiplicando ambo i membri per x^2

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)x^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)x^2$$

$$x^3 + x = x^4 + 1$$

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

L'unica soluzione è quindi $x = 1$, perché il fattore $x^2 + x + 1$ non ha zeri reali, in quanto il discriminante $\Delta = -3$ è negativo.

Suggerimento: in questo caso è estremamente facile controllare che $x = 1$ risulti in un'identità.

Soluzione es. E

Basta osservare che il polinomio $(x - 7)(x - 2)$ si annulla per $x = 7$ e per $x = 2$. Quindi l'equazione $(x - 7)(x - 2) = 0$, che possiamo anche scrivere nella forma $x^2 - 9x + 14 = 0$, ha le soluzioni richieste.

Soluzione es. F

Troviamo una lista di valori critici risolvendo l'equazione corrispondente.

$$x^4 = x^3 + 2x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$$

$$x^2(x + 1)(x - 2) = 0$$

I valori critici sono $-1, 0, 2$. Dobbiamo quindi verificare la disequazione in questi valori e negli intervalli $x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 2, 2 < x$. Scegliamo un numero in ciascun intervallo, per esempio $-10, -0.1, 1, 10$.

- In $x < -1$, siccome $10\,000 \not< -1\,000 + 2 \cdot 100$, la disequazione non è soddisfatta.
- In $-1 < x < 0$, siccome $0.0001 < -0.001 + 2 \cdot 0.01$, la disequazione è soddisfatta.
- In $0 < x < 2$, siccome $1 < 1 + 2$, la disequazione è soddisfatta.
- In $2 < x$, siccome $10\,000 \not< 1\,000 + 2 \cdot 100$, la disequazione non è soddisfatta.

Inoltre in nessuno dei valori $-1, 0, 2$ la disequazione è soddisfatta.

Quindi, in conclusione, la disequazione data è soddisfatta se e solo se $-1 < x < 0$ oppure $0 < x < 2$.

Soluzione es. G

Procediamo come nell'esercizio precedente, però, siccome sono presenti dei denominatori, dobbiamo includere nella lista dei valori critici, non solo le soluzioni dell'equazione, ma anche gli zeri dei denominatori (in questo caso solo $x = 0$).

Siccome le soluzioni dell'equazione sono -2 e 1 , otteniamo i valori $-2, 0, 1$. La disequazione è soddisfatta in $x = -2$ e $x = 1$ (perché si tratta di una disequaglianza larga), mentre ovviamente non ha senso per $x = 0$ a causa dell'annullarsi di un denominatore. Restano da verificare gli intervalli $x < -2$, $-2 < x < 0$, $0 < x < 1$, e $1 < x$. Scegliendo i numeri $-10, -1, 0.1, 10$ e sostituendo, col metodo dell'esercizio F, vediamo che la disequazione è soddisfatta nel secondo e nel quarto caso.

In conclusione, quindi, la disequazione è soddisfatta se e solo se $-2 \leq x < 0$ oppure $1 \leq x$.

Attenzione: notare i segni $\leq$ in corrispondenza delle soluzioni -2 e 1 , e il segno $<$ in corrispondenza del punto $x = 0$ in cui si annulla un denominatore.