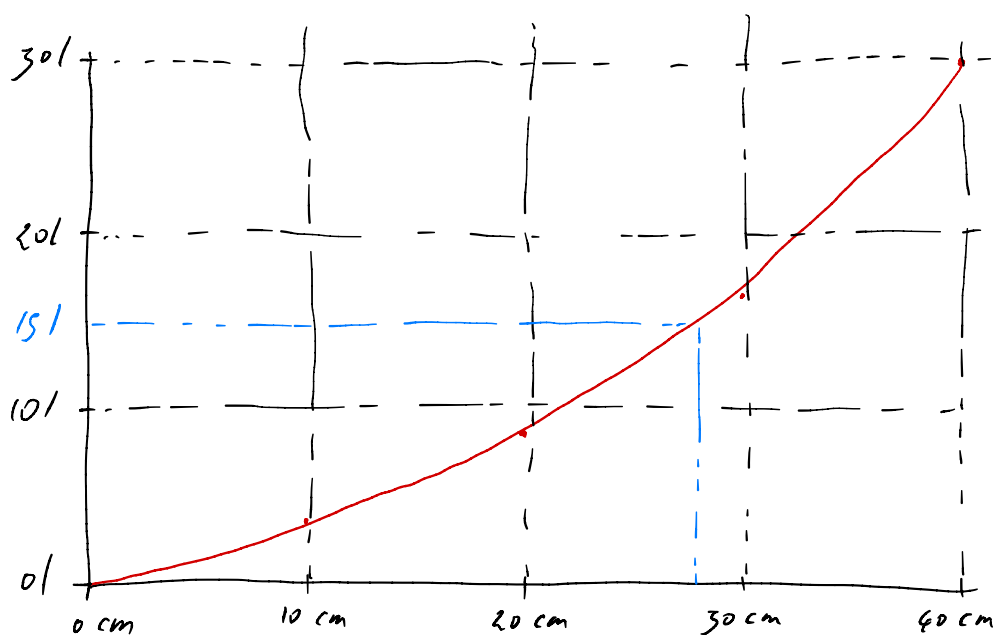


A.1 Il volume d'acqua è costituito da un cono avente altezza h e raggio di base $\frac{h}{2}$ e da un cilindro, sempre di altezza h , con raggio di base 1 dm . Quindi

$$V(h) = \underbrace{\frac{\pi}{12} h^3}_{\text{cono}} + \underbrace{h \cdot \pi \cdot 1 \text{ dm}^2}_{\text{cilindro}} = \pi \left(\frac{1}{12} h^3 + h \cdot 1 \text{ dm}^2 \right)$$

L'altezza dei due vasi è 4 dm , quindi conviene tracciare il grafico per h fra 0 e 4 dm .



A.2 Vediamo dal grafico che la soluzione è vicina a 28 cm . Possiamo calcolare, per esempio

$$V(27 \text{ cm}) = 13.64 \text{ l} < 15 \text{ l} \quad V(29 \text{ cm}) = 15.50 \text{ l} > 15 \text{ l}$$

Procedendo per bisezione nell'intervallo fra 27 cm e 29 cm otteniamo

$$V(28.45 \text{ cm}) = 14.97 \text{ l} < 15 \text{ l} \quad V(28.5 \text{ cm}) = 15.01 \text{ l} > 15 \text{ l}$$

Quindi il livello cercato è 28.5 cm .

A.3) Siccome $(15 \pm 2x)l = (15.0 \pm 0.3)l$, l'intervallo di incertezza del dato è fra 14.7l e 15.3l. Procedendo di nuovo per bisezione, vediamo che 14.7l corrispondono a 28.2 cm di riempimento, mentre 15.3l a 28.8 cm. L'incertezza sulla risposta è quindi:

$$\pm \frac{28.8 \text{ cm} - 28.2 \text{ cm}}{2} = \pm 0.3 \text{ cm.}$$

B.1)

$$Pr(\text{un mess. arriva}) = 1 - Pr(\text{nessun mess. arriva}) = 1 - (1 - 0.1)^{10} \approx 0.651$$

= "tutti i mess. non arrivano" $\rightarrow$

$$Pr(\text{nessun mess. captato}) = (1 - 0.01)^{10} \approx 0.904$$

= "tutti i mess. la fanno franca" $\uparrow$

B.2) L'evento, E , richiesto è l'intersezione fra i due eventi seguenti:

E_1 := "almeno un messaggio arriva a destinazione"

E_2 := "nessun messaggio viene captato dal nemico"

Le probabilità di questi due eventi si calcolano come al punto B.1:

$$Pr(E_1) = 1 - 0.9^n$$

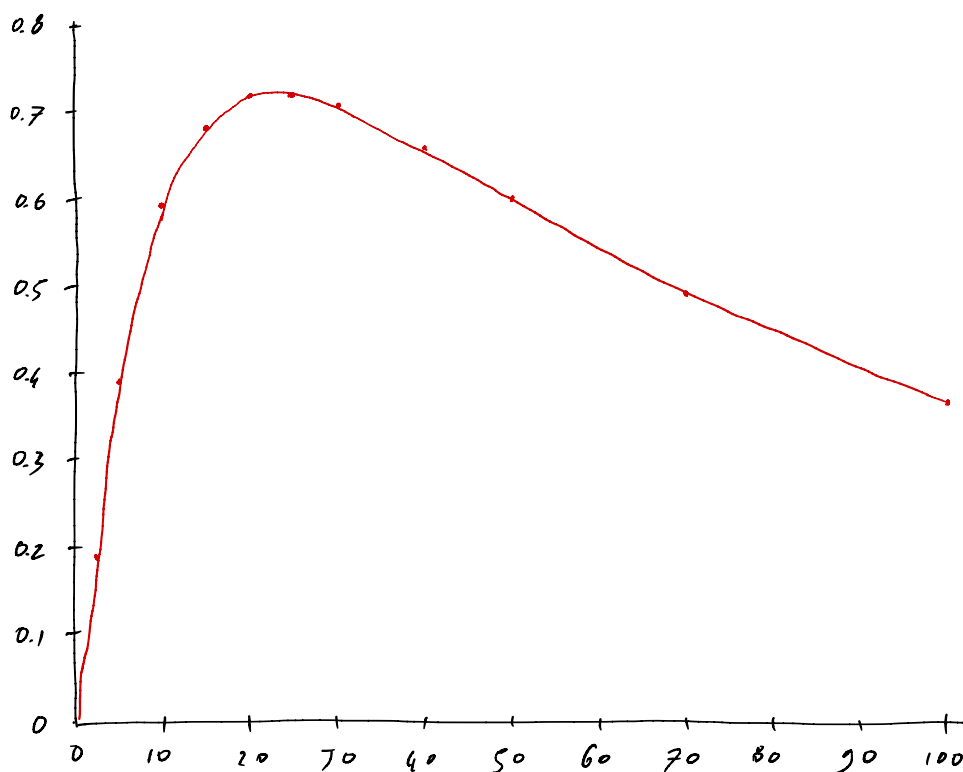
$$Pr(E_2) = 0.99^n$$

Sfruttando l'indipendenza

$$Pr(E) = Pr(E_1 \cap E_2) = Pr(E_1) \cdot Pr(E_2) = (1 - 0.9^n) \cdot 0.99^n$$

Dobbiamo quindi tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = (1 - 0.9^x) \cdot 0.99^x$$



B.3 La derivata di f è

$$f'(x) = 0.99^x \log_e(0.99) - 0.891^x \log_e(0.891)$$

Questa è una funzione continua che si annulla quando

$$0.99^x \log_e(0.99) = 0.891^x \log_e(0.891)$$

$$\left(\frac{0.99}{0.891} \right)^x = \frac{\log_e(0.891)}{\log_e(0.99)}$$

$$0.9^x = \frac{\log_e(0.99)}{\log_e(0.891)}$$

$$x = \log_{0.9} \left(\frac{\log_e(0.99)}{\log_e(0.891)} \right) = \frac{\log_e \left(\frac{\log_e(0.99)}{\log_e(0.891)} \right)}{\log_e(0.9)} \approx 23.17$$

(chiaramente $f'(x) > 0$ per $x < 23.17$ (basta calcolare, per esempio $f'(0) \approx 0.11$) e $f'(x) < 0$ per $x > 23.17$ (basta calcolare $f'(30) \approx -0.0038$). Quindi f è crescente prima di

23.17 è decrescente dopo. Di conseguenza il valore massimo può essere assunto per 23 o per 24 messaggi.

$$f(23) \approx 0.7233 > f(24) \approx 0.7230$$

Per cui conviene inviare 23 messaggi.

C.1 Dalla teoria, la soluzione generale è

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

Da cui calcoliamo

$$x'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Le condizioni sono quindi

$$x(0) = C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

$$x'(0) = -C_1 - 2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1$$

È la soluzione richiesta è

$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

C.2 Dalla teoria, la soluzione generale è

$$x(t) = e^{-t} (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t))$$

Da cui

$$x'(t) = e^{-t} (-(C_1 + C_2) \sin(t) + (C_1 - C_2) \cos(t))$$

Le condizioni sono quindi

$$x(0) = C_2 = 1$$

$$x'(0) = C_1 - C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 1$$

Quindi

$$x(t) = e^{-t} (\sin(t) + \cos(t))$$

B.3 In entrambi i casi abbiamo $x(0)=1$ e $x'(0)=0$, inoltre, l'equazione data

$$x'' = -kx' - 2x$$

Permette di calcolare

$$x''(0) = -kx'(0) - 2x(0) = -k$$

Siccome k , nei due casi ($k=3$ e $k=2$) è positiva, in entrambi i casi $x''(0) < 0$, quindi $t=0$ è un massimo relativo sia per la soluzione del punto C.1, sia per quella del punto C.2.

Per decidere se questo sia anche un massimo assoluto, conviene considerare i due casi separatamente

B.1
$$x'(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-t}$$

Studiando il segno di $x'(t)$ otteniamo

$$2e^{-2t} - 2e^{-t} > 0$$

$$\underbrace{2e^{-t}}_{\text{sempre } > 0} (e^{-t} - 1) > 0$$

$$e^{-t} > 1$$

$$-t = \log_e(e^{-t}) > \log_e(1) = 0$$

$$t < 0$$

Vediamo che $x(t)$ è crescente per $x < 0$ e decrescente altrimenti, quindi $t=0$ è un massimo assoluto.

B.2 È chiaro che $x(-\pi) = e^\pi > 1 = x(0)$, per cui, in questo caso, $t=0$ è un massimo relativo ma non assoluto.