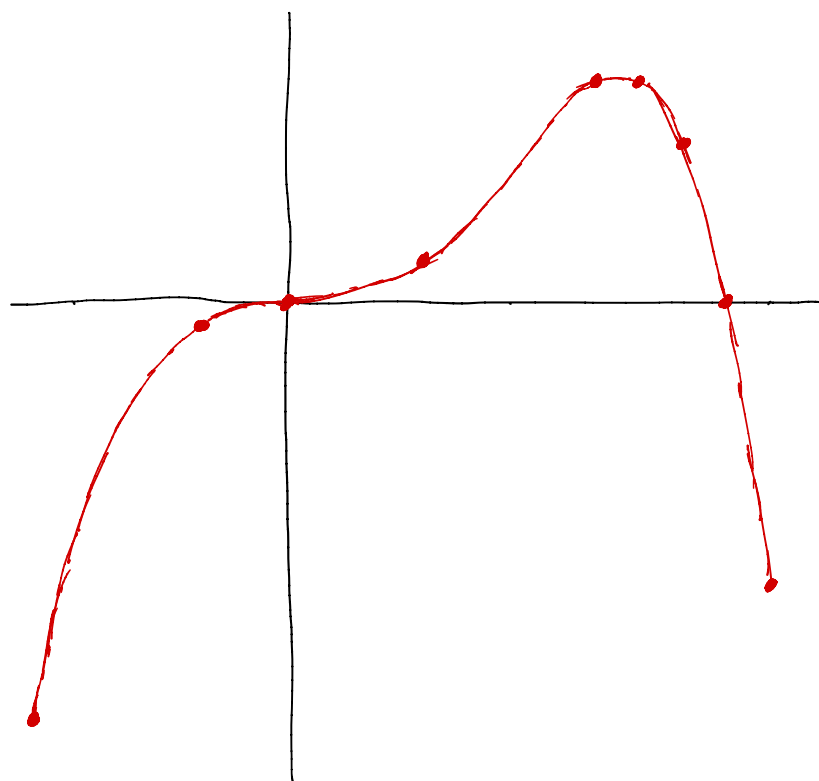


A.1

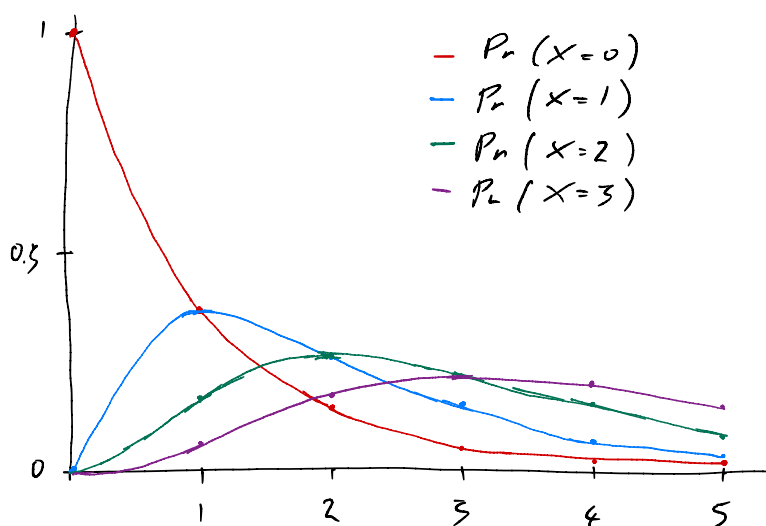


A.2 Il grafico interseca l'asse x in $x=0$ e $x=1$.
La regione limitata di piano fra il grafico e l'asse
è, quindi, quella sotto il grafico per x che va da 0
a 1, e la sua area vale

$$\int_0^1 x^3(1-x) dx = \int_0^1 x^3 - x^4 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \underline{0.05}$$

A.3 La derivata $f'(x) = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x)$ si annulla
in $x=0$ e $x=\frac{3}{4}$. Il massimo può quindi trovarsi in
 $x=0$, $x=\frac{3}{4}$, o $x=1$. Abbiamo $f(0)=0$, $f(1)=1$, e
 $\underline{f(\frac{3}{4}) = \frac{22}{256}}$. Quest'ultimo valore è quindi il massimo.

B.1



B.2 L'evento richiesto è $E = \{X=1\} \cup \{X=2\}$.

$$P_n(E) = P_n(X=1) + P_n(X=2) = e^{-\lambda} \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

Eventi incompatibili perché
X non può essere 1 e 2 allo
stesso tempo.

Detta $f(\lambda)$ questa funzione, abbiamo

$$f'(\lambda) = -e^{-\lambda} \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right) + e^{-\lambda} (1 + \lambda) = e^{-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

La derivata è positiva per $\lambda < \sqrt{2}$ e negativa per $\lambda > \sqrt{2}$.

Di conseguenza $P_n(E) = f(\lambda)$ è massima per $\lambda = \sqrt{2}$.

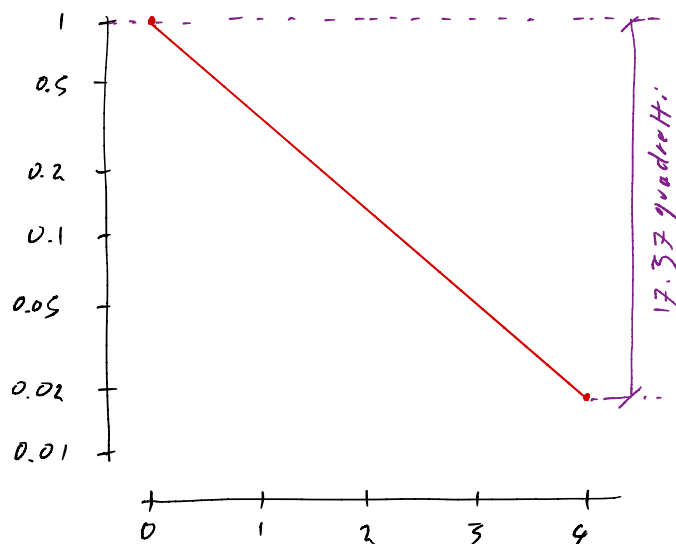
B.3 La richiesta equivale a

$$g(\lambda) = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{6} \right) = P_n(\{X=0\} \cup \{X=1\} \cup \{X=2\} \cup \{X=3\}) = 0.99$$

La derivata $g'(\lambda) = -e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^3}{6}$ è negativa per ogni $\lambda > 0$,
quindi g decresce. Procedendo per bisezione troviamo

$$g(0.82) \approx 0.9901 \text{ e } g(0.825) = 0.9899. \text{ Quindi } \underline{\lambda \approx 0.82}.$$

C.1



Il grafico è una retta che passa per i punti $(0, 1)$ e $(4, e^{-4})$. Per individuare il secondo punto calcoliamo la distanza in quadrati, sulla scala logaritmica, fra 1 e e^{-4} mediante la proporzione

$$20 : \log_{10}(1) - \log_{10}(0.01) = x : \log_{10}(1) - \log_{10}(e^{-4})$$

Ottenendo

$$x = 40 \log_{10}(e) = \frac{40}{\log_e(10)} \approx 17.37$$

C.2 Il tecnico conta 8 occorrenze dell'evento $X=0$ su 25 esperimenti; stima quindi che, in media, l'evento $X=0$ occorra $8 \pm \sqrt{8}$ volte ogni 25 esperimenti. La sua probabilità è quindi $\frac{8 \pm \sqrt{8}}{25} = \underline{0.3 \pm 0.1}$

C.3 Sono state osservate, in totale, 31 chiamate su 25 esperimenti; la media è quindi $\lambda \approx 1.24$.
Da cui stimiamo $P_X(X=0) = e^{-1.24} \approx 0.289$

Per calcolare l'incertezza, usiamo la formula $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dove σ è la deviazione standard della misura.

Otteniamo

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0-1.24)^2 + (2-1.24)^2 + (3-1.24)^2 + \dots}{25}} \approx 1.07$$

L'incertezza su λ è quindi $\pm \frac{1.07}{\sqrt{25}} \approx \pm 0.21$

Da cui abbiamo l'intervallo di incertezza per $P_n(X=0)$

$$\min = e^{-1.24-0.21} \approx 0.235 \quad \max = e^{-1.24+0.21} \approx 0.357$$

L'incertezza su $P_n(X=0)$ è $\frac{\max - \min}{2} = 0.061$, di conseguenza il secondo tecnico ottiene $P_n(X=0) = 0.29 \pm 0.06$.