

Corso di matematica per CTF

Soluzioni della prova online del 28.v.2020

I testi assegnati presentano leggere differenze fra di loro. Risolviamo qui una prova tipica.

ESERCIZIO A

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni (2pt ciascuna)

$$\textcircled{1} \quad 2^x + 2^{-x} = 4.25$$

$$\textcircled{2} \quad x^{-1} > x^{-2}$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i=0}^3 x - i = 10$$

$$\textcircled{1} \quad 2^x + 2^{-x} = 4.25 \Rightarrow 2^x + \frac{1}{2^x} = 4.25$$

Scriviamo $y = 2^x$, per cui $x = \log_2(y)$

$$y + \frac{1}{y} = 4.25 \Rightarrow y^2 + 1 = 4.25y \Rightarrow y^2 - 4.25y + 1 = 0$$
$$(y-4) \cdot (y-0.25)$$

Abbiamo quindi due soluzioni, $y_1 = 4$ e $y_2 = 0.25$, che corrispondono a $x_1 = \log_2(4) = \boxed{2}$ e $x_2 = \log_2(0.25) = \boxed{-2}$.

E' facile verificare che questi valori effettivamente risolvono l'equazione:

$$2^2 + 2^{-2} = 4 + 0.25 = 4.25 \quad 2^{-2} + 2^{-(-2)} = 0.25 + 4 = 4.25$$

$$\textcircled{2} \quad x^{-1} > x^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$$

I denominatori si annullano in $x=0$.

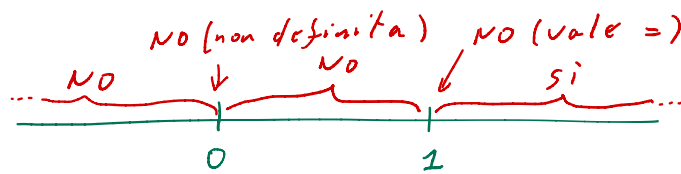
Si ha $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}$ in $x=1$.

Per $x < 0$ la diseg. non è soddisfatta (basta provare $x=-1$, per esempio).

Per $0 < x < 1$ neppure (basta provare $\frac{1}{2}$).

Per $1 < x$ è soddisfatta (basta provare 2).

In definitiva



Quindi: $\boxed{x > 1}$.

Metodo più spiccio

Escludo il punto $x=0$ dove la disequazione non ha senso perché si annullano i denominatori.

Altrove, $x^2 > 0$, quindi posso moltiplicare ambo i membri per x^2 .

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \cdot x^2 > \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \Leftrightarrow \boxed{x > 1}$$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{i=0}^3 x-i = 10$$

$$= (x-0) + (x-1) + (x-2) + (x-3) = 4x - 6$$

$$4x - 6 = 10 \Leftrightarrow \boxed{x = 4}$$

ESERCIZIO B

Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale (3pt), e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento (3pt). In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.

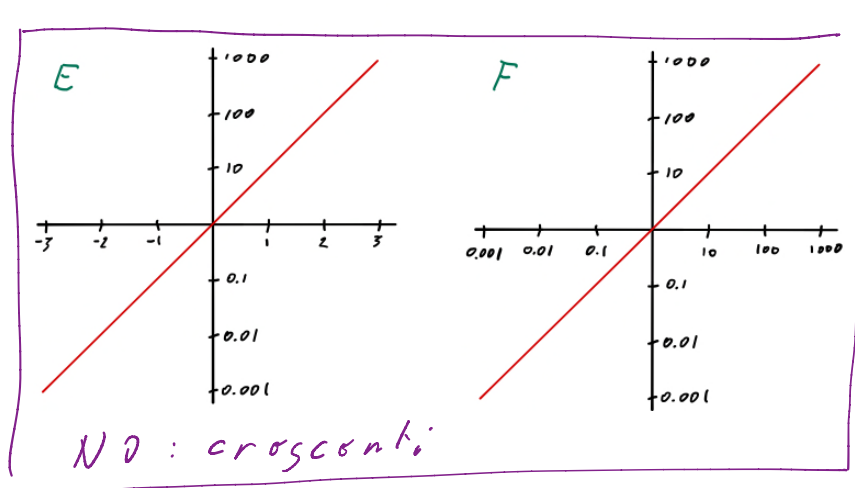
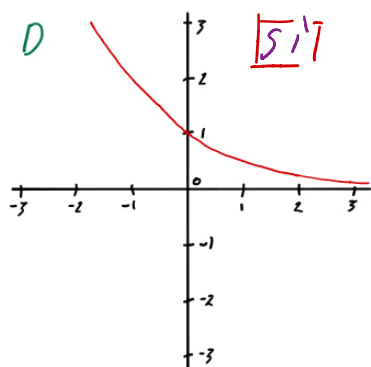
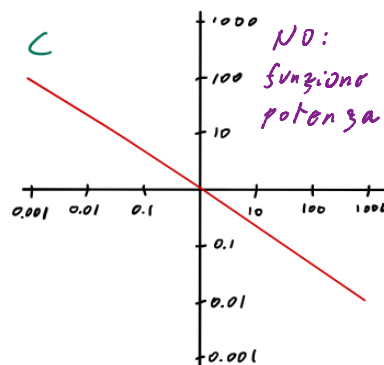
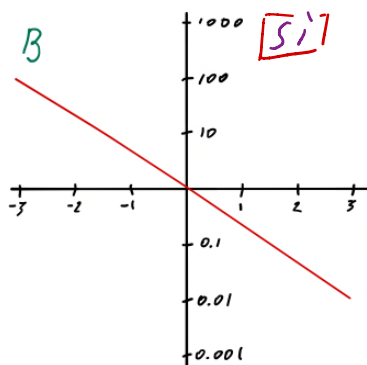
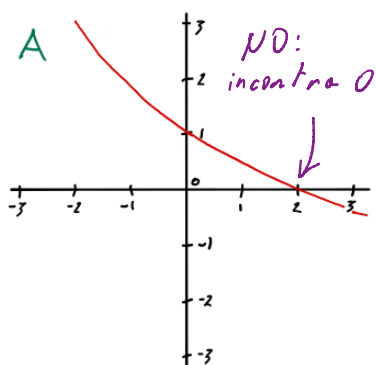


Grafico B

Chiamiamo f la funzione rappresentata.

In generale $f(t) = C \cdot 2^{-t/\tau}$ dove τ è il tempo di dimezzamento. Vediamo dal grafico che

$$f(0.5) = 1 \Rightarrow C \cdot 2^0 = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(t) = 2^{-t/\tau}$$

↑
secondi

$$f(3.5) = 0.01 \Rightarrow 2^{-3.5/\tau} = 0.01 \Rightarrow -\frac{3.5}{\tau} = \log_2(0.01)$$

$$\tau = \frac{3}{-\log_2(0.01)} \text{ s} \approx \boxed{0.45 \text{ s}}$$

Grafico D

Procedendo come nel caso precedente abbiamo

$$f(0s) = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(t) = 2^{-t/\tau}$$

$$f(-1s) = 2 \Rightarrow 2^{1s/\tau} = 2 \Rightarrow \boxed{\tau = 1s}$$

Nota: per controllare che il grafico rappresenti veramente un decadimento esponenziale, può convenire calcolare questa funzione in qualche punto e verificare la conformità col grafico.

ESERCIZIO C

Una capsula (una di quella sorta di capsule che ti fanno trangugiare quando sei malato, non uno di quei cancheri di latta che sparano nello spazio) ha la forma di un corpo centrale cilindrico su ciascuna delle cui basi è appoggiata una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, anche delle due semisfere, è $7.0 \pm 0.2 \text{ mm}$, mentre la sua lunghezza è $17.0 \pm 0.5 \text{ mm}$. Determina il volume della capsula in ml (3pt) e l'incertezza percentuale di questa misura (3pt).

La capsula è costituita da un cilindro e due semisfere.

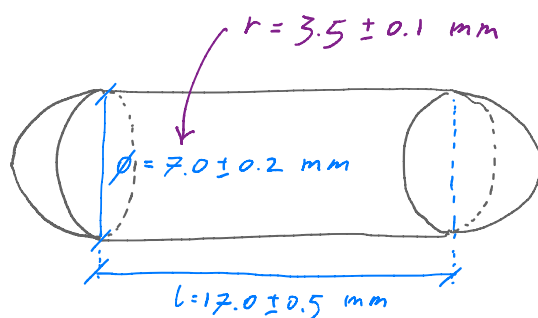
Chiamando L la lunghezza del cilindro e r il raggio,

che coincide, del cilindro e della sfera, abbiamo la seguente formula per il volume

$$V = \underbrace{\pi r^2 L}_{\text{cilindro}} + \underbrace{\frac{4}{3} \pi r^3}_{\text{sfera = due semisfere}} = \pi r^2 \left(L + \frac{4}{3} r \right)$$

Da cui $V = 833.83 \text{ mm}^3 = 0.83383 \text{ ml}$

$$1 \text{ ml} = 10^{-3} \text{ l} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} (10^2 \text{ mm})^3 = 10^3 \text{ mm}^3$$



Nota sul valore 0.83383

Questo numero è indicato con 5 cifre di precisione. Se volessimo abbandonare qui l'esercizio, sarebbe sbagliato dare questo risultato (2 pt. su 3), e dovremmo invece scrivere 0.83 con due sole cifre significative. Noi però intendiamo proseguire con la seconda parte dell'esercizio.

Per stimare l'incertezza, calcoliamo il massimo e il minimo volume dell'intervallo di incertezza, che corrispondono a $r_{\max} = 3.6 \text{ mm}$ $l_{\max} = 17.5 \text{ mm}$ e $r_{\min} = 3.4 \text{ mm}$ $l_{\min} = 16.5 \text{ mm}$ rispettivamente.

$$V_{\max} = 0.30795 \text{ ml}$$

$$V_{\min} = 0.76386 \text{ ml}$$

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = 0.07204 \text{ ml}$$

2 seconda cifra non nulla

L'approssimazione corretta del volume è quindi, come ci aspettavamo alla seconda cifra e l'errore percentuale vale $\frac{0.07204}{0.83383} \approx 9\%$, di conseguenza

$$\boxed{V = 0.83 \pm 9\% \text{ ml}}$$

Nota: anche $\pm 10\%$ è considerato una risposta esatta.

ESERCIZIO D

Una funzione $f(x)$, è rappresentata da un polinomio di terzo grado. Sappiamo che f vale 0 in $x = 0$, e 1 in $x = 1$. Inoltre la derivata di f vale 0 in $x = 0$, e 1 in $x = 1$.

1. Determina l'espressione di $f(x)$.
2. Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = x$?
3. Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra il grafico di f e l'asse delle ascisse.

1. Polinomio di terzo grado $\Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + \cancel{d} = 1 \Rightarrow a + b + \cancel{c} = 1$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f'(1) = 1 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + \cancel{c} = 1 \Rightarrow 3a + 2b = 0$$

In definitiva $c = d = 0$ e

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

da cui $\boxed{f(x) = -x^3 + 2x^2}$

2. Risolviamo l'equazione

$$f(x) = x$$

$$-x^3 + 2x^2 = x$$

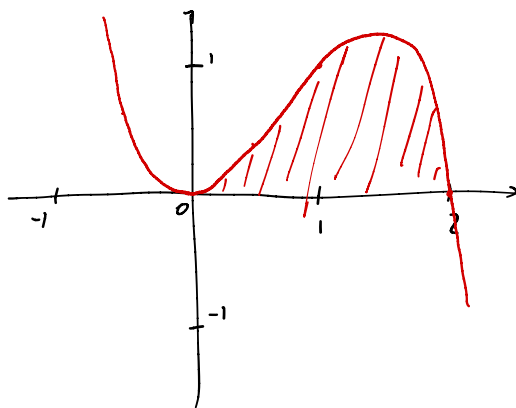
$$-x^3 + 2x^2 - x = 0$$

$$x(-x^2 + 2x - 1) = 0$$

$\rightarrow$ soluzione $x=0$ $\wedge$ una sola soluzione: $x=1$ ($\Delta = 0$).

Quindi ci sono $\boxed{2 \text{ soluzioni!}}$

3.



Le intersezioni del grafico di f con l'asse delle ascisse sono le soluzioni di $f(x) = 0$, ossia

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = 2$$

L'area cercata è quindi:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 -x^3 + 2x^2 dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

ESERCIZIO E

Di una certa funzione $f(x)$ sappiamo che $f(0) = f(1)$. Sappiamo inoltre che $f(x) + f'(x) = 3$ per qualunque numero reale x . Quanto vale $f(-1)$?

La funzione f soddisfa l'equazione differenziale

$$f'(x) = 3 - f(x)$$

Dalla teoria è, quindi, della forma

$$f(x) = 3 + C \cdot e^{-x}$$

Sostituendo questa espressione nella condizione

$f(0) = f(1)$ otteniamo

$$f(0) = 3 + C \cdot e^0 = 3 + C \cdot e^{-1} = f(1)$$

$$C \cdot e^0 = C \cdot e^{-1}$$

$$C \cdot (e^0 - e^{-1}) = 0 \Rightarrow C = 0$$

La funzione f è quindi la costante $f(x)=3$.
Di conseguenza $\boxed{f(-1)=3}$.

ESERCIZIO F

Tre carte, su cui sono scritte le cifre 1, 2 e 3, vengono disposte in uno a caso, con probabilità uniforme, dei sei ordini possibili. Calcola il valore atteso (3pt) e la varianza (3pt) della variabile aleatoria che rappresenta il prodotto delle prime due carte.

L'insieme delle prime due carte dipende, per esclusione, dalla terza carta, e per questa ci sono tre possibilità equiprobabili:

terza carta	probabilità	prime due	prodotto
1	$\frac{1}{3}$	2, 3	6
2	$\frac{1}{3}$	1, 3	3
3	$\frac{1}{3}$	1, 2	2

La legge della nostra variabile aleatoria X è quindi

n	2	3	6
$P_X(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Da cui

$$\boxed{E(X)} = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 6 = \boxed{3 + \frac{2}{3} \approx 3.67}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 36 = 16 + \frac{1}{3} \approx 16.33$$

$$\boxed{Var(X)} = E(X^2) - (E(X))^2 = \boxed{2 + \frac{8}{9} \approx 2.89}$$

Il risultato si considera corretto sia se scritto in forma esatta sia in forma (correttamente) approssimata.