

Esercizi elementari di analisi matematica

(F) Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/l, calcola la capienza del fusto.

(G) Dati i punti $A(-2, -1)$ e $B(0, -1)$, trova il punto $C(x, y)$ sulla retta $x+y=1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

(H) L'energia termica irradiata nell'unità di tempo da un corpo nero alla temperatura T (nella scala assoluta) è

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

dove A indica l'area della superficie del corpo

e $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$.

La variazione di temperatura di una massa M di ferro è legata alla variazione di energia termica da

$$\frac{dQ}{dt} = c M \frac{dT}{dt}$$

con $c = 0.4495 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Infine la densità del ferro è $\rho = 7.874 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Quanto impiega una sfera di una tonnellata di ferro, inizialmente a temperatura ambiente, 300 K, se abbandonata nel vuoto cosmico, per raffreddarsi fino alla temperatura di 10 K?

J Calcola un'approssimazione numerica di:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

L Considera la funzione $f(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$, dove L , k , e x_0 sono parametri fissati.

1. Verifica che la funzione data risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{k}{L} f(x)(L - f(x))$$

2. Fissa $L = 6$, $k = 0.5$, e $x_0 = 5$. Traccia il grafico di $f(x)$ per x che varia fra 0 e 10.

3. Con i parametri fissati al punto precedente, calcola precisamente il valore, se riesci, altrimenti dai una stima ragionevolmente accurata, dell'integrale $\int_0^{10} f(x) dx$.