

Soluzioni dell'esame online del 25.I.2021

I compiti sono generati in modo automatico e casuale in modo tale da differire, nei dati degli esercizi, gli uni dagli altri. Qui è risolto uno dei compiti possibili:

ESERCIZIO A

Calcola:

1. 10^5 kV/s in V/ns
2. una primitiva di $\cos(4-x)$
3. la derivata seconda di xe^x

1. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$10^5 \frac{\overset{k}{10^3} V}{s} = x \frac{V}{\underset{n}{10^{-9}} s} \Rightarrow x = 10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^{-9} = 10^{-1}$$

Di conseguenza $10^5 \frac{kV}{s} = \boxed{0.1 \frac{V}{ns}}$

2. Dobbiamo calcolare l'integrale indefinito di $\cos(4-x)$

$$\int \cos(4-x) dx = -\sin(4-x) + C \quad \leftarrow \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Quindi $\boxed{-\sin(4-x)}$ è una primitiva

3. Ponendo $f(x) = xe^x$ abbiamo

$$f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$$

$$f''(x) = (e^x)' + (x)'e^x + x(e^x)' = \boxed{2e^x + xe^x}$$

ESERCIZIO B

Su una scala logaritmica che va dal numero 0.1 al numero 1000, ed è lunga 25 cm, quanto distano fra loro i punti corrispondenti a 3 e 70, in millimetri?

...

La distanza richiesta d è data dalla proporzione

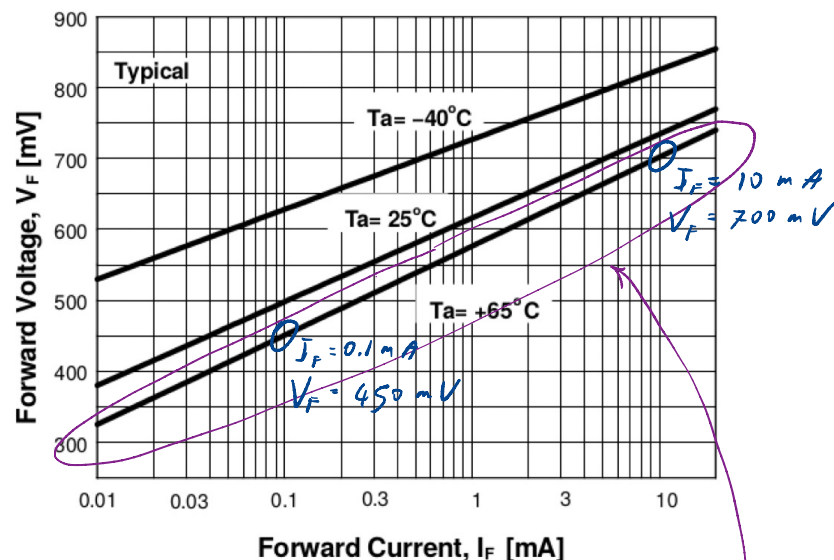
$$25 \text{ cm} : \underbrace{\log_{10} 1000 - \log_{10} 0.1}_4 = d : \log_{10} 70 - \log_{10} 3$$

per cui

$$d = \frac{25 \text{ cm} \cdot (\log_{10} 70 - \log_{10} 3)}{4} \approx 0.55 \text{ cm} = \boxed{05.5 \text{ mm}}$$

Il grafico seguente descrive la legge che lega la tensione V_F alla corrente I_F in un diodo a giunzione p-n, a varie temperature. Scrivi un'espressione che rappresenti V_F in funzione di I_F alla temperatura di 65° .

Suggerimento: attenzione che è l'asse delle ascisse ad essere in scala logaritmica!



Ci interessa quella più in basso delle tre curve. Siccome il diagramma è semilogaritmico, e la curva è una retta, la legge che lega V_F a I_F ha la forma di un esponenziale

$$\left. \begin{array}{l} \text{variabile in scala} \\ \text{logaritmica} \end{array} \right\} \rightarrow I_F = a \cdot 10^{\frac{V_F}{B}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{variabile in scala} \\ \text{lineare} \end{array} \right.$$

L'esercizio chiede, però, V_F in funzione di I_F

$$\frac{I_F}{\alpha} = 10^{\frac{V_F}{\beta}} \Rightarrow \frac{V_F}{\beta} = \log_{10} \frac{I_F}{\alpha} \Rightarrow V_F = \beta \log_{10} \frac{I_F}{\alpha}$$

Leggiamo dal grafico le seguenti coppie di valori corrispondenti:

I_F	0.1 mA	10 mA
V_F	450 mV	700 mV

Da cui si ricavano le equazioni:

$$450 \text{ mV} = \beta \cdot \log_{10} \frac{0.1 \text{ mA}}{\alpha} \quad 700 \text{ mV} = \beta \cdot \log_{10} \frac{10 \text{ mA}}{\alpha}$$

Calcolando la differenza membro a membro abbiamo

$$250 \text{ mV} = \beta \left(\log_{10} \frac{10 \text{ mA}}{\alpha} - \log_{10} \frac{0.1 \text{ mA}}{\alpha} \right) = \beta \cdot \log_{10} \frac{\frac{10 \text{ mA}}{\cancel{\alpha}}}{\frac{0.1 \text{ mA}}{\cancel{\alpha}}} = \beta \cdot 2$$

$\Rightarrow$
 $\beta = 125 \text{ mV}$

Sostituendo infine nella prima

$$450 \text{ mV} = 125 \text{ mV} \cdot \log_{10} \frac{0.1 \text{ mA}}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{0.1 \text{ mA}}{10^{3.6}} = \underline{25 \text{ nA}}$$

Abbiamo quindi la relazione cercata

$$\boxed{V_F = 125 \text{ mV} \cdot \log_{10} \frac{I_F}{25 \text{ nA}}}$$

Nota: come spesso accade, c'è più di un modo di scrivere la medesima funzione. Ogni scrittura matematicamente corretta ottiene punteggio pieno.

ESERCIZIO C

Un rotolo di lamiera spessa 0.50 ± 0.02 mm del diametro di 50.0 ± 0.5 cm è avvolto attorno ad un tubo centrale del diametro di 10.0 cm. Calcola la lunghezza della lamiera con la relativa incertezza.

Suggerimento: supponi che il foglio di lamiera sia largo, per esempio, un metro. Calcola il volume del rotolo. Esprimi il volume di un foglio steso in funzione della lunghezza l . Ricava l .

Indicando con:

h la larghezza del rotolo

V il volume della lamiera avvolta

r_i il raggio del tubo interno

r_e il raggio esterno del rotolo

abbiamo $V = h \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2)$

D'altro canto, detta l la lunghezza ed s lo spessore della lamiera, $V = h \cdot s \cdot l$. Di conseguenza

$$\cancel{h} \cdot s \cdot l = \cancel{h} \cdot \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \Rightarrow l = \pi \frac{r_e^2 - r_i^2}{s}$$

Sostituendo i dati dell'esercizio:

$$l = \pi \cdot \frac{(25 \pm 0.25)^2 \text{ cm}^2 - 5^2 \text{ cm}^2}{(0.50 \pm 0.02) \text{ mm}} = \pi \cdot \frac{(625 \pm 25) \text{ cm}^2 - 25 \text{ cm}^2}{(0.50 \pm 4\%) \text{ mm}} =$$

$$= \pi \cdot \frac{(600 \pm 12.5) \text{ cm}^2}{(0.50 \pm 4\%) \text{ mm}} = (377.0 \pm 6.1\%) \text{ m} = \boxed{(380 \pm 20) \text{ m}}$$

ESERCIZIO D

Trova i punti stazionari della funzione $f(x) = x^3 - 4x^2$, e per ciascuno determina se si tratti di un massimo relativo e se si tratti di un minimo relativo.

...

I punti stazionari sono gli zeri della derivata $f'(x) = 3x^2 - 8x$
 $3x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}$

Abbiamo quindi due punti stazionari: uno in $x_1 = 0$ e uno in $x_2 = \frac{8}{3}$

La derivata seconda di f è $f''(x) = 6x - 8$.

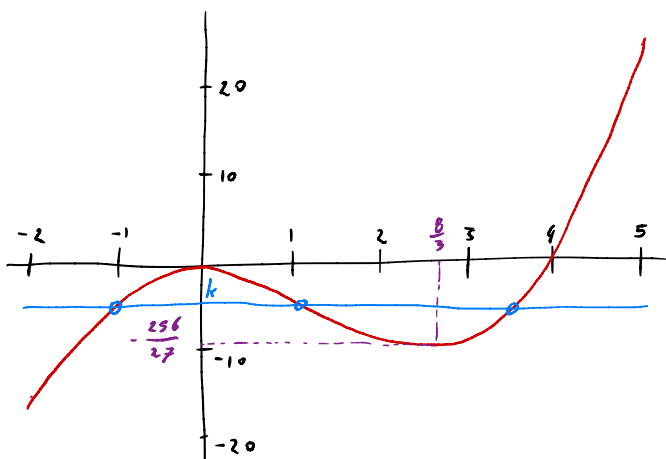
Siccome $f''(x_1) = -8 < 0$, vediamo che x_1 è un massimo relativo, mentre, siccome $f''(x_2) = 8 > 0$, x_2 è un minimo relativo.

In conclusione i punti stazionari sono due:

massimo relativo in $x = 0$
 minimo relativo in $x = \frac{8}{3}$

Per quali valori di k l'equazione $f(x) = k$ ha più di una soluzione?

Sfruttando le informazioni ottenute al punto precedente, non è difficile tracciare un grafico approssimativo di f .



Affinché la retta $y=k$ intersechi il grafico di f in più di un punto, occorre che k sia compreso fra i valori assunti da f in $\frac{8}{3}$ e 0 rispettivamente. I valori richiesti

sono dunque quelli che rispettano la condizione $-\frac{256}{27} \leq k \leq 0$

ESERCIZIO E

Risolvi l'equazione differenziale $f''(x) = -f(x) + 2$.

...

Si tratta di un'equazione lineare a coefficienti costanti.
Cominciamo col risolvere l'equazione omogenea associata $f'' = -f$.
Occorrerebbe risolvere l'equazione di secondo grado $\lambda^2 = -1$, che, però, ha discriminante $\Delta = -4 < 0$. Avvalendoci delle formule a pagina 246 delle note (a.a. 2020-21), possiamo scrivere la soluzione generale dell'omogenea

$$f(x) = e^{\frac{a}{2}x} (C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx))$$

dove a è il coefficiente di f' nell'equazione, dunque $a=0$, e $w = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 1$. Abbiamo quindi:

$$f(x) = C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx)$$

A questa soluzione dobbiamo sommare una soluzione particolare dell'equazione data. Per esempio $f(x)=2$.

La soluzione generale cercata è quindi:

$$f(x) = C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx) + 2$$

L'equazione differenziale $g'(x) = g(x) + 3 \sin(x)$ ammette una soluzione particolare della forma $g(x) = A \sin(x+B)$. Trova questa soluzione.

Trovare questa soluzione significa trovare i numeri A e B .
Sostituiamo quindi l'espressione di g nell'equazione, coll'intento di ottenere le condizioni che A e B devono soddisfare.

$$(A \sin(x+B))' = A \sin(x+B) + 3 \sin(x)$$

Calcoliamo la derivata a sinistra

$$A \cos(x+B) = A \sin(x+B) + 3 \sin(x)$$

Ora, noi desideriamo scegliere A e B in modo tale che questa espressione sia un'identità valida per ogni x . Ci conviene, quindi, applicare le formule di somma di seno e coseno per portare ambo i membri dell'espressione nella medesima forma: $\square \sin(x) + \triangle \cos(x)$.

$$A \cos(x) \cos(B) - A \sin(x) \sin(B) = A \sin(x) \cos(B) + A \cos(x) \sin(B) + 3 \sin(x) \\ \cos(x) A \cos(B) + \sin(x) (-A \sin(B)) = \cos(x) A \sin(B) + \sin(x) (3 + A \cos(B))$$

Se facciamo in modo che i coefficienti, di $\cos(x)$ e $\sin(x)$ rispettivamente, nei due membri dell'uguaglianza, coincidano, allora avremo un'identità

*la soluzione $A=0$ non va bene perché
la seconda equazione diventerebbe $0=3$*

$$\begin{cases} A \cos(B) = A \sin(B) \\ -A \sin(B) = 3 + A \cos(B) \end{cases} \Rightarrow \cos(B) = \sin(B) \Rightarrow \tan(B) = 1$$

$\frac{\sin}{\cos} = \tan$

La prima equazione implica che $B = \arctan(1) + k\pi$. Siccome ci è chiesta una sola soluzione, prendiamo $B = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$-A \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 + A \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-A \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + A \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Abbiamo quindi la soluzione cercata $y(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Nota: la soluzione è corretta anche se i coefficienti sono espressi in forma decimale: per es. $y(x) = -2.1213 \sin(x + 0.7854)$.

ESERCIZIO F

Ogni giorno, un certo orologio si discosta dalla misura corretta del tempo guadagnando un secondo con probabilità 0.2, perdendo un secondo con probabilità 0.3, perdendo due secondi con probabilità 0.2, oppure, con probabilità 0.3 non guadagna né perde. Calcola valore atteso e deviazione standard dell'errore dell'orologio (indicato col segno + se in guadagno e col segno - se in perdita).

Chiamiamo X la variabile aleatoria che rappresenta l'errore dell'orologio. Il testo ci dice che X può assumere i valori: -2, -1, 0, 1 e questo avviene con probabilità 0.2, 0.3, 0.3, 0.2 rispettivamente. La legge di X è dunque come segue

x	-2	-1	0	1
$P_X(x)$	0.2	0.3	0.3	0.2

Abbiamo quindi:

$$E(X) = -2 \cdot 0.2 + (-1) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 = -0.5$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 - 0.25 = 1.05$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx 1.025$$

L'orologio si comporta ogni giorno in maniera indipendente dagli altri. Calcola valore atteso e deviazione standard dell'errore accumulato in un periodo di 365 giorni.

L'errore accumulato in 365 giorni è la somma dei 365 errori commessi in ciascun giorno: $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{365}$

Sappiamo che $X_1, X_2, \dots, X_{365}$ sono indipendenti e

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{365}) = -0.5$$

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \dots = \text{Var}(X_{365}) = 1.05$$

Di conseguenza

$$E(Y) = E(X_1 + \dots + X_{365}) = E(X_1) + \dots + E(X_{365}) = 365 \cdot (-0.5) = -182.5$$

E, sfruttando l'indipendenza

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_{365}) = 365 \cdot 1.05 = 383.25$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)} \approx 19.6$$