

Soluzioni dell'esame online del 15.II.2021

I compiti sono generati in modo automatico e casuale in modo tale da differire, nei dati degli esercizi, gli uni dagli altri. Qui è risolto uno dei compiti possibili.

ESERCIZIO A

1. Secondo la regola discussa nel corso, con quante cifre significative sono espressi i numeri seguenti?

$$\begin{array}{ccc} 0.006530 & 1.0 \cdot 10^6 & 170.0 \\ \overbrace{\hspace{1cm}} & \overbrace{\hspace{1cm}} & \overbrace{\hspace{1cm}} \\ \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{4} \end{array}$$

2. Risolvi le seguenti equivalenze:

$$3.4 \cdot 10^{-2} \text{ hgm} = ? \text{ gdm}$$

$$1.7 \cdot 10^{-3} \text{ mg/dm}^3 = ? \text{ } \mu\text{g/mm}^3$$

$$3.2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-2} = ? \text{ mm}^{-2}$$

$$3.4 \cdot 10^{-2} \underbrace{\text{hg}}_{10^2 \text{ g}} \cdot \underbrace{\text{m}}_{10^{-1} \text{ dm}} = x \text{ g} \cdot \text{dm} \Rightarrow 3.4 = x \cdot 10^{-1} \Rightarrow x = \boxed{34}$$

$$1.7 \cdot 10^{-3} \underbrace{\text{mg}}_{10^3 \mu\text{g}} / \underbrace{\text{dm}^3}_{10^6 \text{ mm}^3} = y \text{ } \mu\text{g/mm}^3 \Rightarrow y = \boxed{1.7 \cdot 10^{-6}}$$

$$3.2 \cdot 10^2 \underbrace{\text{m}^{-2}}_{10^{-6} \text{ mm}^{-2}} = z \text{ mm}^{-2} \Rightarrow z = \boxed{3.2 \cdot 10^{-4}}$$

ESERCIZIO B

Una popolazione di microorganismi cresce esponenzialmente, aumentando del 15% ogni ora. Quanti minuti impiega la popolazione per raddoppiare?

Il numero di individui è rappresentato dalla formula

$$N(t) = N(0) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^{\frac{t}{1h}}$$

ci chiediamo a che tempo t valga $N(t) = 2 \cdot N(0)$.

$$N(t) = 2 \cdot N(0) \Rightarrow \cancel{N(0)} \cdot 1.15^{\frac{t}{1h}} = 2 \cdot \cancel{N(0)}$$

$$t = 1h \cdot \log_{1.15}(2) = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.15} \approx 5.0h = \boxed{300 \text{ min}}$$

Il numero di individui al tempo t in questa popolazione, che indichiamo con $f(t)$, soddisfa un'equazione differenziale del tipo $f'(t) = k \cdot f(t)$. Calcola k , espresso in h^{-1} , con tre cifre significative di precisione.

La soluzione generale dell'equazione è $f(t) = C e^{kt}$ e noi vogliamo $f(t) = N(t)$.

$$f(t) = N(t) \Rightarrow \underline{C e^{kt}} = \underline{N(0)} \cdot \underline{1.15^{\frac{t}{1h}}}$$

Questa seconda uguaglianza si verifica se $\underline{C = N(0)}$ e $\underline{e^{kt} = 1.15^{\frac{t}{1h}}}$, di conseguenza

$$e^{kt} = 1.15^{\frac{t}{1h}} \Rightarrow \log_e(e^{kt}) = \log_e(1.15^{\frac{t}{1h}}) \Rightarrow \cancel{k} t = \frac{\cancel{t}}{1h} \cdot \log_e(1.15)$$

$$\Rightarrow k = \log_e(1.15) h^{-1} \approx \boxed{0.140 h^{-1}}$$

ESERCIZIO C

Una struttura orizzontale è sostenuta da due supporti puntiformi: A e B. Per le leggi dell'equilibrio, il peso portato da ciascun supporto è inversamente proporzionale alla distanza fra il baricentro della struttura ed il supporto, ossia:

$$\text{peso su A} : \text{peso su B} = \text{distanza CB} : \text{distanza AC}$$

La distanza AB è pari alla somma AC + CB e vale 2m. Il peso totale della struttura è pari alla somma dei pesi portati dai due supporti e vale $30.0 \pm 0.5 \text{ kN}$. La distanza AC vale $1.20 \pm 0.05 \text{ m}$. Calcola il peso retto da A con la relativa incertezza assoluta.

Indichiamo con p_A , p_B e p_T i pesi portati da A o B e il peso totale rispettivamente. Usando la proporzione data otteniamo

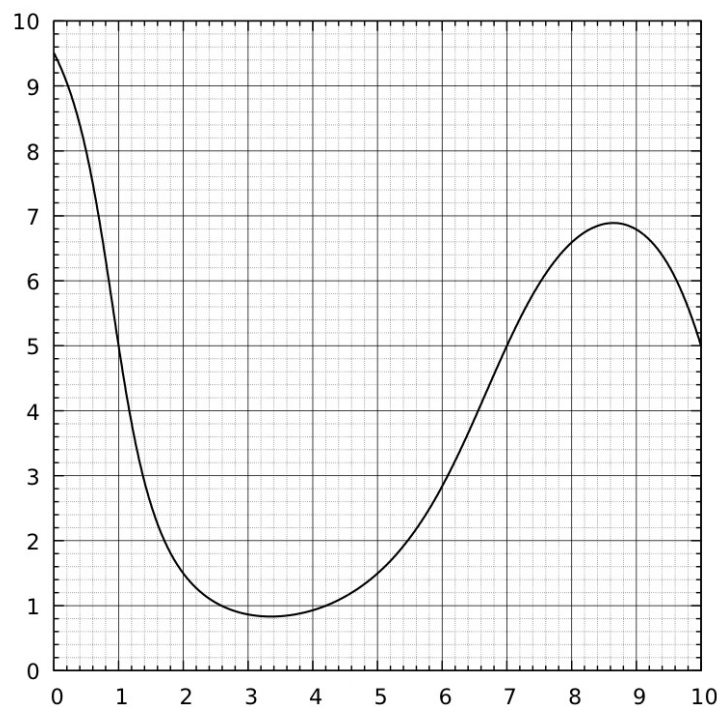
$$P_A : P_B = CB : AC \quad \Rightarrow \quad P_A : \underbrace{P_A + P_D}_{P_T} = \underbrace{CB}_{AB-AC} : \underbrace{AC+CB}_{AB}$$

$$P_A = \frac{P_T \cdot (AB-AC)}{AB} = \frac{(30 \pm 0.5) \text{ kN} \cdot (2 \text{ m} - (1.20 \pm 0.05) \text{ m})}{2 \text{ m}}$$

$$= \frac{\underbrace{(30 \pm 0.5)}_{\pm 1.7\%} \cdot \underbrace{(0.80 \pm 0.05)}_{\pm 6.3\%}}{2} \text{ kN} = (12 \pm 7.0\%) \text{ kN} = \boxed{(12.0 \pm 1.0) \text{ kN}}$$

ESERCIZIO D

Considera la funzione $f(x)$ rappresentata dal grafico seguente



Calcola approssimativamente:

$$\int_1^9 f(x) dx \quad \int_3^8 f(x) - 2\sqrt{f(x)} dx$$

$$\int_1^9 f(x) dx \approx$$

$$\frac{1}{2} \underbrace{f(1)}_5 + \underbrace{f(2)}_{1.5} + \underbrace{f(3)}_{0.8} + \underbrace{f(4)}_{0.5} + \underbrace{f(5)}_{1.5} + \underbrace{f(6)}_{2.8} + \underbrace{f(7)}_5 + \underbrace{f(8)}_{6.6} + \frac{1}{2} \underbrace{f(9)}_{6.8}$$

$$= \boxed{25}$$

Nota: il valore esatto, calcolato conoscendo l'equazione usata per tracciare il grafico è 24.6. Qualunque risultato entro un'unità da questo valore otteneva punteggio pieno.

Per il secondo integrale, scriviamo $g(x) = f(x) - 2\sqrt{f(x)}$

Quindi $g(3) \approx 0.8 - 2\sqrt{0.8} \approx -1.00$

$$g(4) \approx 0.9 - 2\sqrt{0.9} \approx -1.00$$

$$g(5) \approx 1.5 - 2\sqrt{1.5} \approx -0.95$$

$$g(6) \approx 2.8 - 2\sqrt{2.8} \approx -0.55$$

$$g(7) \approx 5 - 2\sqrt{5} \approx 0.53$$

$$g(8) \approx 6.6 - 2\sqrt{6.6} \approx 1.46$$

$$\int_3^8 g(x) dx \approx \frac{1}{2} g(3) + g(4) + g(5) + g(6) + g(7) + \frac{1}{2} g(8) \approx -1.7$$

Nota: valore esatto -1.8. Un risultato entro 0.5 da questo otteneva punteggio pieno.

ESERCIZIO E

È possibile dare la seguente definizione di distanza fra due funzioni, f_1 e f_2 , entrambe definite nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\text{distanza fra } f_1 \text{ e } f_2 = \sqrt{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f_1(x) - f_2(x))^2 dx}$$

1. Calcola la distanza fra $f_1(x) = \sin(x)$ e $f_2(x) = 2x$.

Nota: potrebbe servirti la formula $(\sin(x))^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Si tratta di calcolare $\sqrt{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin(x) - 2x)^2 dx}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - 2x)^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((\sin(x))^2 - 4x \sin(x) + 4x^2) dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^2 dx - 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx + 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^2 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = \underbrace{\left[-x \cos(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_0 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) dx = \left[\sin(x) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{12}$$

Abbiamo quindi

$$\sqrt{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - 2x)^2 dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 8 + \frac{\pi^3}{3}}$$

2. Trova la funzione $g_1(x) = ax + b$ più vicina possibile a $g_2(x) = \sin(x + 0.2)$.

Nota: come indicato durante lo svolgimento della prova, questa NON è una domanda semplice.

Per calcolare la distanza fra le due funzioni date dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (ax + b - \sin(x + 0.2))^2 dx =$$

$$a^2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx}_{\frac{\pi^3}{12} \text{ visto al punto 1.}} + b^2 \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx}_{\pi} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x+0.2))^2 dx}_{\text{chiamiamo questo } K \text{ vedremo che non ci serve}}$$

$$+ 2ab \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x dx}_0 - 2a \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+0.2) dx}_0 - 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+0.2) dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x+0.2) dx = \underbrace{\left[-x \cos(x+0.2) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_0 + \left[\sin(x+0.2) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 0.2\right) = 2 \cos(0.2)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+0.2) dx = \left[-\cos(x+0.2) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.2\right) = 2 \sin(0.2)$$

Abbiamo quindi:

$$\text{distanza} = \sqrt{\underbrace{\frac{\pi^3}{12} a^2 - 4a \cos(0.2)}_{\text{chiamiamo questo } p_1(a)} + \underbrace{\pi b^2 - 4b \sin(0.2)}_{\text{chiamiamo questo } p_2(b)} + K}$$

Per rendere la distanza più piccola possibile dobbiamo rendere più piccolo possibile il radicando, quindi dobbiamo prendere a nel vertice della parabola $p_1(a)$ e b nel vertice della parabola $p_2(b)$.

$$\boxed{a = \frac{24 \cdot \cos(0.2)}{\pi^3} \quad b = \frac{2 \sin(0.2)}{\pi}}$$

ESERCIZIO F

In una popolazione umana, i gruppi sanguigni O, A, B, e AB si presentano rispettivamente nel 30%, 44%, 18% e 8% degli individui. Si è stabilito che il gruppo sanguigno è correlato alla probabilità di contrarre una certa malattia, ed, in particolare, gli individui nei gruppi O, A, B, e AB hanno rispettivamente probabilità $0.5 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-4}$, $1 \cdot 10^{-4}$ e $2 \cdot 10^{-4}$ di ammalarsi. Che probabilità ha un individuo scelto uniformemente sulla popolazione di contrarre la malattia? Preso uniformemente un individuo nella popolazione fra quelli che si sono ammalati, che probabilità c'è che il suo gruppo sanguigno sia O?

Detti: O, A, B, AB gli eventi che l'individuo abbia questi rispettivi gruppi sanguigni, e M l'evento che si ammali, abbiamo.

$$\begin{aligned}
 P_r(M) &= P_r(M \cap O) + P_r(M \cap A) + P_r(M \cap B) + P_r(M \cap AB) \\
 &= \underbrace{P_r(M|O)P_r(O)}_{0.5 \cdot 10^{-4} \quad 0.3} + \underbrace{P_r(M|A)P_r(A)}_{1 \cdot 10^{-4} \quad 0.44} + \underbrace{P_r(M|B)P_r(B)}_{1 \cdot 10^{-4} \quad 0.18} + \underbrace{P_r(M|AB)P_r(AB)}_{2 \cdot 10^{-4} \quad 0.08}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{= 0.93 \cdot 10^{-4}} \quad \text{Nota: si potrebbe scrivere questo numero in notazione scientifica } \underline{9.3 \cdot 10^{-5}} \text{ ma non c'è nessun obbligo di farlo.}$$

$$P_r(O|M) = \frac{P_r(M \cap O)}{P_r(M)} = \frac{P_r(M|O) \cdot P_r(O)}{P_r(M)} \approx \boxed{16\%}$$

Nota: il ragionamento proposto da questo esercizio è anche noto come teorema di Bayes.