

Soluzioni dell'esame online del 31.11.2021

I compiti sono generati in modo automatico e casuale in modo tale da differire, nei dati degli esercizi, gli uni dagli altri. Qui è risolto uno dei compiti possibili:

ESERCIZIO A

1. Arrotonda queste quantità a tre cifre significative e scrivile in notazione scientifica.

73.043

0.054672

189.50

$$\begin{aligned} 73.043 &= 7.3043 \cdot 10^1 \approx 7.30 \cdot 10^1 \\ 0.054672 &= 5.4672 \cdot 10^{-2} \approx 5.47 \cdot 10^{-2} \\ 189.50 &= 1.8950 \cdot 10^2 \approx 1.90 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

2. Che percentuale di un litro sono i seguenti volumi?

95 μl

3.3 cm^3

(0.4 dm)³

$$95 \mu\text{l} : 1\text{l} = x_1 : 100 \Rightarrow x_1 = \frac{95 \text{ ml} \cdot 100}{1\text{l}} = \frac{95 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{1} = 0.0095$$

$$3.3 \text{ cm}^3 : 1\text{l} = x_2 : 100 \Rightarrow x_2 = \frac{3.3 \text{ cm}^3 \cdot 100}{1\text{l}} = \frac{3.3 \cdot 10^{-3} \cdot 100}{1} = 0.33$$

$$(0.4 \text{ dm})^3 : 1\text{l} = x_3 : 100 \Rightarrow x_3 = \frac{(0.4 \text{ dm})^3 \cdot 100}{1\text{l}} = \frac{0.4^3 \cancel{\text{dm}^3} \cdot 100}{1\cancel{\text{l}}} = 6.4$$

Quindi le percentuali sono, rispettivamente:

$$\boxed{0.0095\% \quad 0.33\% \quad 6.4\%}$$

ESERCIZIO B

La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assume i valori seguenti.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.00	2.68	4.76	7.16	9.83

Determina, usando il metodo dell'interpolazione lineare, un'approssimazione del valore di $f(3.7)$ ed una della soluzione dell'equazione $f(x) = 15 - x^2$. (Esprimi i risultati arrotondati al centesimo.)

1. Valore di $f(3.7)$.

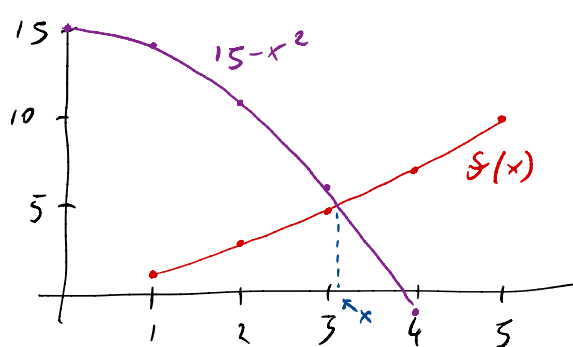
Siccome 3.7 è compreso fra le ascisse tabulate 3 e 4 usiamo la formula di interpolazione con $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

$$\boxed{f(3.7)} \approx (3.7 - x_1) \cdot \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + f(x_1)$$

$$= (3.7 - 3) \cdot \frac{7.16 - 4.76}{4 - 3} + 4.76 = \boxed{6.44}$$

2. Soluzione di $f(x) = 15 - x^2$

Un grafico approssimativo mostra che la soluzione cercata, x , è compresa fra 3 e 4. Possiamo, quindi, approssimare $f(x)$ con la formula di interpolazione lineare applicata ponendo $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.



$$f(x) \approx (x - 3) \cdot \frac{7.16 - 4.76}{4 - 3} + 4.76$$

$$= x \cdot 2.40 - 2.44$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione data otteniamo

$$x \cdot 2.40 - 2.44 = 15 - x^2$$

Questa equazione di secondo grado ha le soluzioni:

$$x^2 + x \cdot 2.40 - 17.44 = 0$$

$$x = \frac{-2.40 \pm \sqrt{75.52}}{2} \approx \begin{cases} 3.15 \\ -5.55 \end{cases}$$

Soltanto la soluzione 3.15, però, ha senso, perché l'approssimazione di $f(x)$ che stiamo usando è valida solo per x compresa fra 3 e 4. La soluzione cercata è quindi $x = 3.15$

ESERCIZIO C

Si vuole determinare il numero di pallini di cioccolato presenti in una fornitura di esattamente dodici tonnellate di deliziose merendine. Viene pesata una di queste merendine determinandone il peso in 43 ± 1 g, quindi si conta il numero dei pallini che essa contiene, trovandone 77. Quanti sono i pallini nell'intera fornitura? (Esprimi la risposta col corretto numero di cifre significative indicando l'incertezza assoluta.)

Supponendo che la distribuzione dei pallini nell'impasto delle merendine sia uniforme, possiamo stimare il numero di questi mediante la proporzione

$$\underbrace{43 \text{ g}}_{43 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} : \underbrace{12 \text{ tonnellate}}_{12 \cdot 10^3 \text{ kg}} = 77 : n. \text{ pallini}$$

$$n. \text{ pallini} = \frac{77 \cdot 12 \cdot 10^3 \text{ kg}}{43 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} \approx 21.488 \cdot 10^6$$

Nota: finché non abbiamo calcolato l'errore manteniamo parecchie cifre di precisione.

Dobbiamo ora includere in questo calcolo l'incertezza. Le incertezze sul peso della fornitura e su quello della merendina campione (43.00 ± 1.0 g) sono date nel testo.

La scelta di una delle merendine da pesare introduce un'incertezza sul conto dei pallini, 77, nel momento in cui si vuole usare questo numero per rappresentare il valore medio, su tutte le merendine di pari peso, del numero dei pallini. Questa incertezza vale $\pm \sqrt{n}$ dove n rappresenta il risultato del conto sul campione, ossia 77. In conclusione $77 \pm 11.4\%$.

$$n_{\text{pallini}} = \frac{\overbrace{(77 \pm \sqrt{77})} \cdot \cancel{12 \cdot 10^3 \text{ kg}}}{\underbrace{(43 \pm 1)}_{43 \pm 2.3\%} \cdot \cancel{10^{-3} \text{ kg}}} = (21.488 \pm 13.7\%) \cdot 10^6$$

$$= \boxed{(21 \pm 3) \cdot 10^6}$$

ESERCIZIO D

Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ la cui derivata non sia mai negativa e si annulli in $x = 3$. Trova una funzione $g(x)$ pari al doppio di una sua primitiva.

1. $f(x)$. L'unica condizione che dobbiamo rispettare è che la derivata $f'(x)$ di $f(x)$ sia sempre positiva e nulla in $x = 3$. In generale, la derivata di un polinomio di terzo grado è un polinomio di secondo grado. Occorre quindi trovare un polinomio di secondo grado che non sia mai negativo e nullo in $x = 3$. Per esempio poniamo

$$f'(x) = (x-3)^2$$

Per $f(x)$ possiamo scegliere una qualunque primitiva di $f'(x)$

$$\int f'(x) dx = \int (x-3)^2 dx = \frac{1}{3} (x-3)^3 + C$$

per esempio, scegliendo $C = 0$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{3} (x-3)^3 = \frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 9x - 9}$$

3. $g(x)$. Datta $h(x)$ la primitiva del testo abbiamo le condizioni

$$g(x) = h'(x) \quad g(x) = 2 h(x)$$

Di conseguenza $h(x)$ deve soddisfare l'equazione

$$h'(x) = 2 h(x)$$

Quindi $h(x)$ deve essere una funzione della forma

$$h(x) = C \cdot e^{2x}$$

Se non abbiamo altre condizioni, possiamo scegliere, per esempio, $C = 1$, quindi $h(x) = e^{2x}$, e, di conseguenza

$$\boxed{g(x) = h'(x) = 2e^{2x}}$$

ESERCIZIO E

Due variabili aleatorie X e Y indipendenti possono assumere i valori 0 e 1. Sai che il valore atteso di X è 0.3 e quello di Y è 0.7. Determina la varianza di Y . Determina la probabilità dell'evento $X + Y = 1$.

Cominciamo col determinare la legge di X e di Y .

X	0	1
P_X	$P_X(0)$	$P_X(1)$

Y	0	1
P_Y	$P_Y(0)$	$P_Y(1)$

Per X abbiamo le condizioni

$$P_X(0) + P_X(1) = 1 \quad \leftarrow \text{sempre vera}$$

$$\cancel{0 \cdot P_X(0)} + 1 \cdot P_X(1) = 0.3 \quad \leftarrow E(X) = 0.3$$

Dalla seconda condizione abbiamo immediatamente $P_X(1) = 0.3$ quindi, dalla prima, $P_X(0) = 0.7$. Allo stesso modo, per Y

otteniamo $p_Y(1) = 0.7$ e $p_Y(0) = 0.3$.

X	0	1
p_X	0.7	0.3

Y	0	1
p_Y	0.3	0.7

Possiamo ora calcolare la varianza di Y

$$E(Y^2) = 0.3 \cdot 0^2 + 0.7 \cdot 1^2 = 0.7$$

$$\boxed{\text{Var}(Y)} = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0.7 - 0.7^2 = \boxed{0.21}$$

$\uparrow = 0.7$ per dato dell'esercizio

L'evento $X+Y=1$ si verifica se $X=1$ e $Y=0$ o, viceversa $X=0$ e $Y=1$, ossia

$$\{X+Y=1\} = \underbrace{(\{X=1\} \cap \{Y=0\})}_{E_1} \cup \underbrace{(\{X=0\} \cap \{Y=1\})}_{E_2}$$

Gli eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili, quindi:

$$P(\{X+Y=1\}) = P(E_1) + P(E_2)$$

inoltre, siccome le variabili X e Y sono indipendenti:

$$P(E_1) = P(\{X=1\}) \cdot P(\{Y=0\}) = p_X(1) \cdot p_Y(0) = 0.09$$

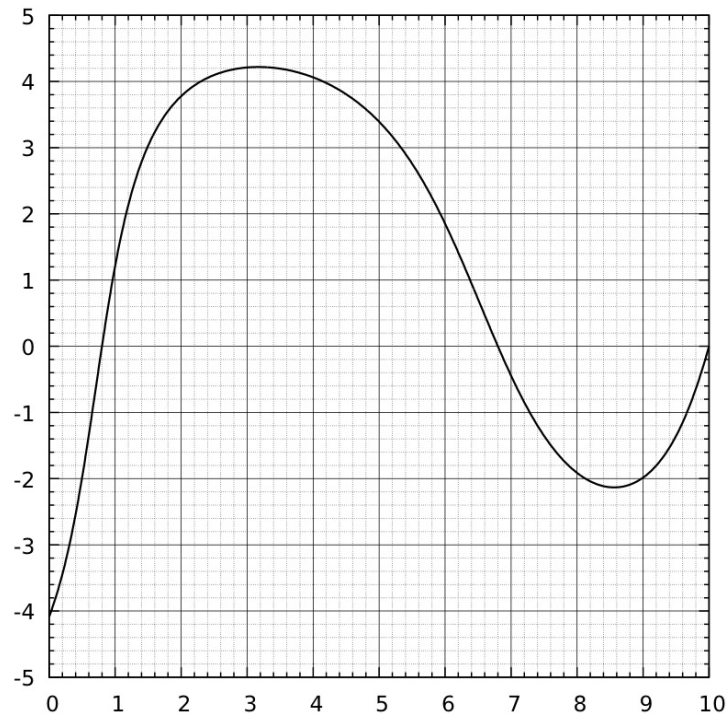
$$P(E_2) = P(\{X=0\}) \cdot P(\{Y=1\}) = p_X(0) \cdot p_Y(1) = 0.49$$

in conclusione

$$\boxed{P(\{X+Y=1\})} = P(E_1) + P(E_2) = \boxed{0.58}$$

ESERCIZIO F

Considera la funzione $f(x)$ rappresentata dal grafico seguente



Calcola approssimativamente $\int_0^5 f(x) dx$. Determina per che valore di k , fra 0 e 10, l'integrale $\int_0^k f(x) dx$ assume il massimo valore.

1. Calcoliamo $\int_0^5 f(x) dx$ col metodo dei trapezi, usando $\Delta x = 1$

$$\boxed{\int_0^5 f(x) dx} \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{1}{2} f(5) \right)$$

$$\approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2} (-4.0) + 1.2 + 3.8 + 4.2 + 4.0 + \frac{1}{2} 3.4 \right)$$

$$\boxed{= 12.9}$$

2. Chiamiamo $g(k)$ la funzione da massimizzare

$$g(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^k f(x) dx$$

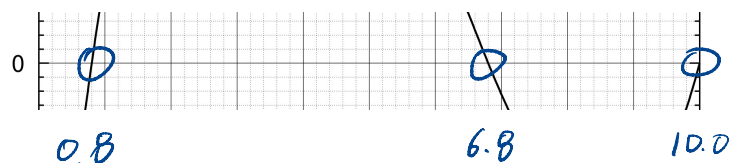
Per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, detta $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ abbiamo

$$g(k) = F(k) - F(0)$$

Volendo massimizzare $g(k)$, studiamone la derivata

$$g'(k) = \underbrace{(F(k))'}_{=f(k) \text{ poiché } F \text{ è una primitiva di } f} - \underbrace{(F(0))'}_{=0 \text{ in quanto } F \text{ è dominata da una costante}} = f(k)$$

La derivata di $g(k)$ si annulla quindi precisamente in quei valori di k per cui $f(k)=0$, ossia



Il massimo di $g(k)$ è quindi assunto in uno dei seguenti valori di k : 0, 0.8, 6.8, 10.0 (i punti stazionari di $g(k)$ e gli estremi del dominio). Siccome $g'(k)=f(k)$ è negativa fra 0 e 0.8, $g(k)$ decresce fra 0 e 0.8, quindi il massimo non può essere in 0.8. Similmente non può essere in 10.0. Rimangono 0 e 6.8. È facile calcolare $g(0)$

$$g(0) = \int_0^0 f(x) dx = 0$$

Per $g(6.8)$ potremmo usare il metodo dei trapezi, oppure sfruttare il calcolo di $\int_0^5 f(x) dx$ in questo modo:

$$g(6.8) = \int_0^{6.8} f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_5^{6.8} f(x) dx$$

Il primo addendo vale circa 12.9, il secondo è ≥ 0 perché $f(x) \geq 0$ nell'intervallo fra 5 e 6.8. Quindi

$$g(6.8) > 0 = g(0)$$

In conclusione $g(k)$ assume il massimo valore in $k=6.8$.