

Soluzioni dell'esame online del 31.V.2021

ESERCIZIO A

VALUTAZIONE

Calcola:

- 2 pt. 1. Una primitiva di $f(x) = 4 \sin(2x)$.
2 pt. 2. I punti stazionari di $g(x) = x^3 - 12x$.
2 pt. 3. $\sum_{i=1}^5 2i^2 - i$.

1. $\int 4 \sin(2x) dx = -2 \cos(2x) + C$

quindi una primitiva è, per esempio

$$F(x) = \boxed{-2 \cdot \cos(2x)}$$

2. $g'(x) = 3x^2 - 12$

risolviamo l'equazione $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

abbiamo quindi i punti stazionari: $\boxed{2 \ 0 \ -2}$

3. $\sum_{i=1}^5 2i^2 - i$

$$= (2 \cdot 1^2 - 1) + (2 \cdot 2^2 - 2) + (2 \cdot 3^2 - 3) + (2 \cdot 4^2 - 4) + (2 \cdot 5^2 - 5)$$

$$= 1 + 6 + 15 + 28 + 45$$

$$= \boxed{95}$$

ESERCIZIO B

VALUTAZIONE

Una batteria perde il 10% della sua capacità all'anno.

- 3 pt. 1. Di quanto, in percentuale, la capacità odierna della batteria supera quella che avrà fra 6 anni?
3 pt. 2. Supponiamo che il costo di una batteria di ricambio sia direttamente proporzionale alla sua capacità. Se si vuole avere sempre a disposizione una certa capacità minima, spendendo, a lungo andare, il meno possibile, ogni quanti anni conviene cambiare la batteria (scrivi il risultato arrotondato alla prima cifra decimale)?

Nota: in questa domanda si trascurano i costi di installazione della batteria nuova e di smaltimento della vecchia, le variazioni del prezzo e delle prestazioni delle batterie nel tempo, il tasso di inflazione, la possibilità di utilizzare un certo numero di batterie più piccole che si sostituiscono a rotazione, etc.

1. Detta C_0 la capacità odierna della batteria, fra t anni la capacità sarà

$$C_t = C_0 \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right)^t = C_0 \cdot 0.9^t$$

Dobbiamo determinare di che percentuale C_0 supera C_6 . L'equazione da risolvere è

$$C_6 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = C_0$$

Svolgendo i calcoli:

$$\underbrace{C_0 \cdot 0.9^6}_{C_6} \left(1 + \frac{x}{100}\right) = \cancel{C_0} \Leftrightarrow 0.9^6 \left(1 + \frac{x}{100}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 100 \left(\frac{1}{0.9^6} - 1 \right) \approx 88.17$$

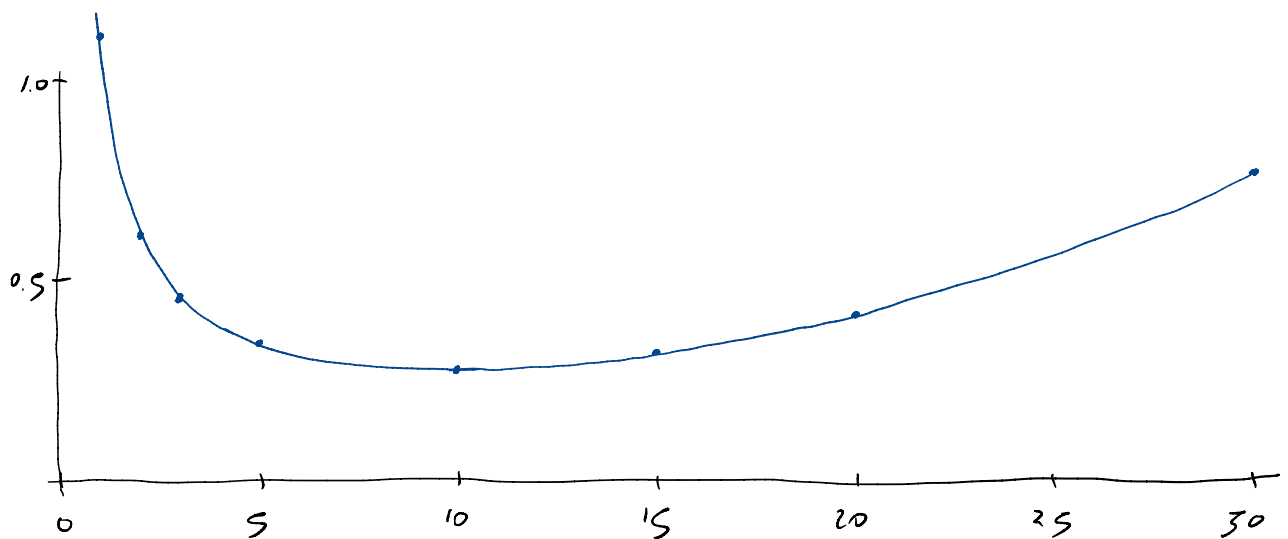
La percentuale cercata è quindi circa l'88%.

2. Poniamo di cambiare la batteria ogni t anni e di richiedere una certa capacità minima $C_{\min}$ sempre disponibile. Siccome la capacità delle batterie decresce col tempo dobbiamo richiedere $C_t = C_{\min}$.

$$\text{Da cui ricaviamo } C_0 = \frac{1}{0.9^t} C_t = \frac{1}{0.9^t} C_{\min}.$$

Siccome il costo delle batterie è proporzionale alla loro capacità, dovremo spendere $C_0 \cdot k$ euro ad ogni sostituzione, per un opportuno prezzo unitario k . La spesa annuale è quindi $\frac{C_0 \cdot k}{t} = \frac{k}{t \cdot 0.9^t} C_{\min}$ e questa è la quantità da rendere più piccola possibile. Le costanti k e $C_{\min}$ sono fissate, resta dunque da

rendere minimo il fattore $f(t) = \frac{1}{t \cdot 0.9^t}$. Tracciamo un grafico di $f(t)$.



Il minimo si trova chiaramente in un punto stazionario intorno a $t \approx 10$. Calcoliamolo esattamente

$$f'(t) = - \frac{0.9^t + t \cdot 0.9^t \cdot \log_e 0.9}{(t \cdot 0.9^t)^2} = - \frac{1}{\underbrace{t^2 \cdot 0.9^t}_{\text{sempre } \neq 0}} \cdot (1 + t \cdot \log_e 0.9)$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 + t \log_e 0.9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{\log_e 0.9} \approx 9.5$$

Conviene quindi cambiare la batteria ogni 9.5 anni.

ESERCIZIO C

VALUTAZIONE: Su un ettaro di terreno (un quadrato di cento metri di lato) piove, con l'intensità di $2.5 \pm 10\%$ millimetri di pioggia all'ora, per un tempo di 15 ± 1 minuti. Calcola quanti litri d'acqua piovana sono caduti su quel terreno, indicando l'incertezza assoluta.

Nel tempo descritto, la pioggia deposita uno strato d'acqua profondo $h = (2.5 \pm 10\%) \frac{\text{mm}}{\text{h}} \cdot \frac{15 \pm 1}{60} \text{ h}$
 $\sqrt{\quad} = 0.25 \pm 6.67\%$

Il volume di questo stato è

$$= 10^{-3} \text{ m}^3 = \text{ l}$$

$$V = h \cdot (100 \cdot \text{m})^2 = (2.5 \pm 10\%) \cdot (0.25 \pm 6.67\%) \cdot 100^2 \cdot \text{mm} \cdot \text{m}^2$$
$$= (6.25 \pm 16.7\%) \cdot 10^3 \text{ l} = \boxed{6000 \pm 1000 \text{ l}}$$

ESERCIZIO D

Considera la soluzione particolare $f(x)$ dell'equazione differenziale

$$f'' = 4f' + f + 4$$

valutazione

tale che $f(0) = h$ e $f'(0) = k$.

- 3 pt. 1. Per che valori di h e k la soluzione $f(x)$ è una funzione costante?
- 3 pt. 2. Per che valori di h e k la soluzione $f(x)$ ha un massimo relativo in $x = 0$?

1. La derivata di una funzione costante è nulla, quindi

$$f'(x) = 0 \implies \underline{k = f'(0) = 0}$$
$$\implies f''(x) = (f'(x))' = (0)' = 0$$

Sostituendo f' ed f'' nell'equazione data otteniamo

$$\underbrace{f''(x)}_0 = 4 \underbrace{f'(x)}_0 + f(x) + 4$$

$$0 = f(x) + 4 \implies f(x) = -4 \implies \underline{h = f(0) = -4}$$

2. Perché $x=0$ sia un punto di massimo relativo, occorre, in particolare, che sia un punto stazionario, quindi

$$k = f'(0) = 0$$

inoltre f ha un massimo relativo in $x=0$ se

$$f''(0) < 0 \implies \underbrace{4 f'(0)}_{=0} + f(0) + 4 < 0 \implies h = f(0) < -4$$

mentre ha un minimo relativo nel caso opposto

$$f''(0) > 0 \Rightarrow 4 \underbrace{f'(0)}_{=0} + f(0) + 4 > 0 \Rightarrow h = f(0) > -4$$

Resta quindi da analizzare il caso $k=0$ $h=4$. Questa è appunto la situazione della domanda 1., e, in questo caso, f è la funzione costante $f(x) = -4$. Siccome, attorno a $x=0$ — e, in realtà per qualunque x — abbiamo $f(x) = -4 \leq -4 = f(0)$, anche in questo caso $x=0$ soddisfa la definizione di massimo relativo.

In definitiva, la soluzione ha un massimo relativo in $x=0$ per $\boxed{h \geq -4 \text{ e } k=0}$

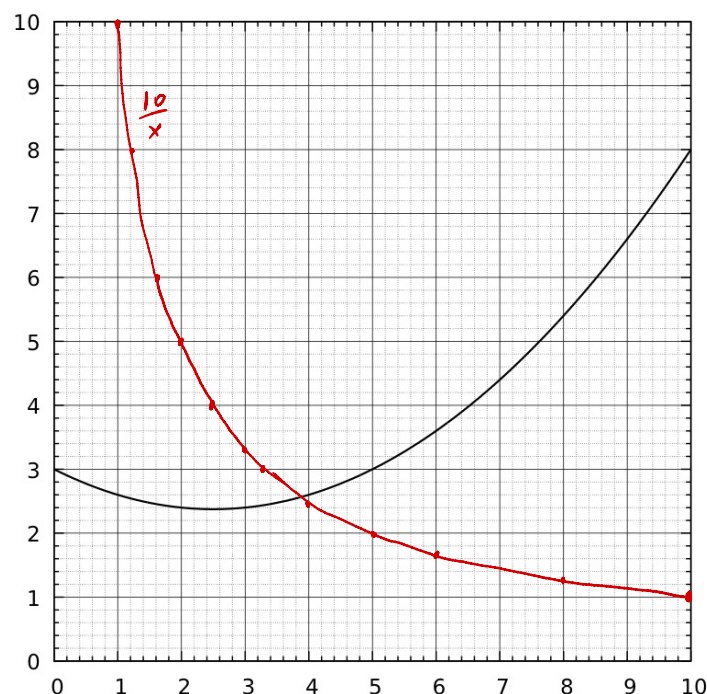
Nota. Il caso $h=-4$ è sottile. Praticamente, è accettabile anche la risposta $h > -4$ $k=0$.

ESERCIZIO E

VALUTAZIONE

Il grafico in figura rappresenta una funzione polinomiale $f(x)$ di secondo grado.

- 3 p.k. 1. Scrivi l'espressione di $f(x)$.
- 3 p.k. 2. Trova il valore di x per cui $x \cdot f(x) = 10$.



1. La forma generale di una funzione polinomiale di secondo grado è

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Possiamo leggere dal grafico i valori

$$f(0) = 3 \quad f(5) = 3 \quad f(10) = 8$$

Abbiamo quindi il seguente sistema di equazioni nelle incognite a, b, c

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3 \\ a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3 \Rightarrow 25a + 5b = 0 \Rightarrow 10b = -50a \\ a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 8 \Rightarrow 100a + 10b = 5 \Rightarrow 100a - 50a = 5 \end{cases}$$

$$a = 0.1 \quad b = -0.5$$

Di conseguenza $\boxed{f(x) = 0.1x^2 - 0.5x + 3}$

2. Si tratta di risolvere l'equazione $x \cdot f(x) = 10$, ossia

$$f(x) = \frac{10}{x}$$

Tracciando il grafico di $\frac{10}{x}$ si vede che questo interseca quello di $f(x)$ fra $x = 3.8$ e $x = 4.0$. Troviamo la prima cifra decimale per bisezione:

x	$f(x)$	$\frac{10}{x}$
3.80	2.54	2.63
3.85	2.56	2.60
3.90	2.57	2.56
4.00	2.60	2.50

Si vede che la soluzione x_0 si trova fra 3.85 e 3.90, per cui $\boxed{x_0 \approx 3.9}$ non ha senso cercare una precisione maggiore, vista l'incertezza nella lettura del grafico.

Nota: un altro procedimento valido per rispondere a questa seconda domanda sarebbe stato scrivere l'equazione

$$x \cdot f(x) = 10$$

$$x(0.1x^3 - 0.5x + 3) = 10$$

$$0.1x^3 - 0.5x + 3 - 10/x = 0$$

per poi risolvere quest'ultima, ad esempio, per bisezione.

VALUTAZIONE

ESERCIZIO F

- 3 pt. 1. Calcola la probabilità di ottenere tante teste quante croci in quattro lanci indipendenti di una moneta (ciascuno dei quali può fare testa o croce con pari probabilità).
- 3 pt. 2. Ci sono due monete: una equilibrata, che fa testa o croce con uguale probabilità, e una truccata in modo tale da fare testa l'80% delle volte. Si prende a caso, con probabilità uniforme, una delle due monete. Poi si lancia questa moneta quattro volte. E si constata di aver ottenuto più croci che teste. Qual è la probabilità che la moneta scelta fosse quella truccata?

1. Siccome ciascun lancio può fare testa o croce con pari probabilità, le sedici possibili sequenze di quattro risultati consecutivi sono tutte equiprobabili:

T T T T	T C T T	C T T T	C C T T
T T T C	T C T C	C T T C	C C T C
T T C T	T C C T	C T C T	C C C T
T T C C	T C C C	C T C C	C C C C

e, di queste, sei contengono tante teste quante croci. La probabilità cercata è quindi $\frac{6}{16}$ ossia $\boxed{\frac{3}{8}}$

2. Questo è un problema di probabilità condizionata. Avendo constatato il verificarsi dell'evento

$A = \text{"sono state estratte più croci che teste"}$

ci chiediamo quale sia la probabilità dell'evento

B = "la moneta estratta è truccata"

Ossia, ci stiamo chiedendo il valore di

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(B \cap A)}{Pr(A)}$$

Conosciamo calcolare $Pr(B \cap A)$ e $Pr(\bar{B} \cap A)$, avremo poi

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(B \cap A)}{Pr(B \cap A) + Pr(\bar{B} \cap A)} \quad (*)$$

$\bar{B} \cap A$: questo è l'evento "la moneta estratta è onesta e sono state estratte più croci che teste". La probabilità che sia stata estratta la moneta onesta è 0.5, poi, assumendo questo, la probabilità di fare più croci che teste è $\frac{5}{16}$ — per via dei 5 casi cccc, cccct, cctcc, ctccc, tcccc. Quindi:

$$Pr(\bar{B} \cap A) = 0.5 \cdot \frac{5}{16} \approx 0.1563$$

$B \cap A$: "la moneta estratta è truccata e sono state estratte più croci che teste". La probabilità che sia stata estratta la moneta truccata è ancora 0.5, ma ora si complica il calcolo della probabilità di fare più croci. Il caso cccc, tenendo conto del fatto che la moneta è truccata, ha probabilità $(1-0.8)^4$, e i casi cccct etc. hanno ciascuno probabilità $0.8 \cdot (1-0.8)^3$. Abbiamo allora

$$Pr(B|A) = 0.5 \cdot (0.2^4 + 4 \cdot 0.8 \cdot 0.2^3) \approx 0.0136$$

Sfruttando la formula (*) otteniamo quindi:

$$Pr(B|A) = \frac{Pr(B, A)}{Pr(B, A) + Pr(\bar{B}, A)} \approx \frac{0.0136}{0.1563 + 0.0136} \approx 0.080$$

La probabilità richiesta è dunque $\sim 8.0\%$.