

Soluzioni dell'esame online del 28.VI.2021

ESERCIZIO A

VALUTAZIONE

Calcola:

- 2 pt. 1. che percentuale di 2 h sono 30 min
- 2 pt. 2. $\Pr(A \cap B)$ sapendo che $\Pr(A) = 0.6$, $\Pr(B) = 0.4$, e $\Pr(A \cup B) = 0.7$
- 2 pt. 3. la massima area che può avere un rettangolo di perimetro 10 cm.

$$1. \quad 30 \text{ min} : 2 \text{ h} = x : 100 \Rightarrow 30 \text{ min} : 120 \text{ min} = x : 100$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{30 \cdot 100}{120} = 25$$

Il 25%.

$$2. \quad \underbrace{\Pr(A \cap B)}_{0.7} + \underbrace{\Pr(A \cup B)}_{0.7} = \underbrace{\Pr(A)}_{0.6} + \underbrace{\Pr(B)}_{0.4}$$

$$\boxed{\Pr(A \cap B)} = 0.6 + 0.4 - 0.7 = \boxed{0.3}$$

3. Petti x e y i lati del rettangolo, abbiamo

$$2x + 2y = \text{perimetro} = 10 \text{ cm} \Rightarrow y = 5 \text{ cm} - x$$

$$\text{area} = x \cdot y = x \cdot (5 \text{ cm} - x) = x \cdot 5 \text{ cm} - x^2$$

Si tratta quindi di trovare il massimo di

$$f(x) = x \cdot 5 \text{ cm} - x^2$$

al variare di x fra 0 e 5 cm (perché un lato non può essere più lungo del semiperimetro).

$$f'(x) = 5 \text{ cm} - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.5 \text{ cm}$$

Agli estremi: $x = 0$, 5 cm abbiamo $f(x) = 0$, mentre

$$f(2.5 \text{ cm}) = \boxed{6.25 \text{ cm}^2}, \text{ questo è quindi il massimo.}$$

ESERCIZIO B

Nel vagone merci di cappuccetto rosso ci sono 30 tonnellate di mele gialle che pesano, in media, 140 g ciascuna, e 40 tonnellate di mele rosse che pesano, in media, 200 g ciascuna. Quante sono, in percentuale, le mele rosse? Quanto pesa, in media, ciascuna delle mele di cappuccetto rosso?

VALUTAZIONE
3 pt.
3 pt.

Per rispondere alla *prima domanda* dobbiamo capire quante siano le mele rosse e quante le gialle, infatti:

$$\text{percentuale rosse} : 100 = \text{numero rosse} : \underbrace{\text{numero totale}}_{= \text{numero rosse} + \text{numero gialle}}$$

Sfruttiamo quindi i dati per calcolare il numero di mele gialle e rosse

$$\underbrace{\text{peso medio gialle}}_{140 \text{ g}} = \frac{\overbrace{\text{peso totale gialle}}^{30 \text{ t}}}{\text{numero gialle}}$$

$$\text{numero gialle} = \frac{\overbrace{30 \cdot 10^6 \text{ g}}^{30 \text{ t}}}{140 \text{ g}} \approx 2.143 \cdot 10^5$$

$$\underbrace{\text{peso medio rosse}}_{200 \text{ g}} = \frac{\overbrace{\text{peso totale rosse}}^{40 \text{ t}}}{\text{numero rosse}}$$

$$\text{numero rosse} = \frac{\overbrace{40 \cdot 10^6 \text{ g}}^{40 \text{ t}}}{200 \text{ g}} \approx 2 \cdot 10^5$$

$$1. \text{ percentuale rosse} : 100 = 2 \cdot 10^5 : 2.143 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5$$

$$\underline{\text{percentuale rosse} \approx 48} \quad (\text{circa il } 48\%)$$

$$2. \quad \text{peso medio} = \frac{\text{peso totale}}{\text{numero totale}} \approx \frac{30 \text{ t} + 40 \text{ t}}{2.143 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5} \\ \approx 169.0 \text{ g} \approx \boxed{170 \text{ g}}$$

Nota: Siccome i dati sono forniti con due cifre significative di precisione, è leggermente meglio arrotondare il risultato a 170 g. La risposta 169 g è ugualmente accettabile.

ESERCIZIO C

Un serbatoio cilindrico avente esattamente un metro di diametro interno è disposto con asse verticale. Alle ore 7:00, il serbatoio contiene $1 \pm 1\% \text{ m}^3$ d'acqua. Sapendo che il livello dell'acqua decresce alla velocità di $20 \pm 5\% \text{ cm/h}$, calcola a che ora si svuota il serbatoio, indicando l'incertezza nella maniera più appropriata.

Valutazione

3 pt.

3 pt.

Abbiamo due dati diffusi, perché sappiamo lo riempimento iniziale del serbatoio sotto forma di volumi, ma la velocità di svuotamento ci è data facendo riferimento al livello dell'acqua. Possiamo quindi procedere in due modi, o calcoliamo il livello iniziale, e poi dividiamo questo per il calo di livello all'ora, oppure calcoliamo il volume d'acqua perso all'ora, e poi dividiamo il volume iniziale per questa quantità. Seguiamo qui la prima via.

$$\underbrace{\text{volume iniziale}}_{1 \pm 1\% \text{ m}^3} = \underbrace{\text{area di base}}_{\pi \cdot \left(\frac{1 \text{ m}}{2}\right)^2} \cdot \text{livello iniziale}$$

$$\text{livello iniziale} = \frac{1 \pm 1\% \text{ m}^3}{\pi \cdot 0.25 \text{ m}^2} = 1.2732 \pm 1\% \text{ m}$$

Possiamo ora calcolare il tempo impiegato dal serbatoio per svuotarsi

$$\begin{aligned} \text{tempo svuotamento} &= \frac{\text{livello iniziale}}{\text{velocità calo}} = \frac{1.2732 \pm 1\% \text{ m}}{20 \pm 5\% \frac{\text{cm}}{\text{h}}} \\ &= \frac{127.32 \pm 1\% \text{ cm}}{20 \pm 5\% \text{ cm}} \text{ h} = 6.367 \pm 6\% \text{ h} \end{aligned}$$

Si chiede, però, a che ora si svuoti il serbatoio, non dopo quanto tempo, conviene quindi convertire questa quantità in ore e minuti, e l'incertezza in incertezza assoluta — ricordando che questa è la maniera appropriata di esprimere le incertezze nelle misure basate su uno zero convenzionale, come la temperatura in °C, o, appunto, le ore.

$$\begin{aligned} \text{tempo svuotamento} &= 6.367 \pm 6\% \text{ h} = 6 \text{ h } 22 \text{ min} \pm 23 \text{ min} \\ &\approx 6 \text{ h } 20 \text{ min} \pm 20 \text{ min} \end{aligned}$$

Quindi il serbatoio si svuota alle 13:20 con un'incertezza di più o meno 20 minuti.

Nota: È accettabile anche "alle 13:22 ± 23 min".

VALUTAZIONE

ESERCIZIO D

3 pt.

1. Scrivi l'espressione di una funzione esponenziale $f(x)$ tale che $f(10)$ supera $f(-10)$ del 70% e $f(0) = 4$.

3 pt.

2. Scrivi l'espressione di una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(1) = e^6 g(-1)$ e $\int_{-1}^1 g(x) dx = 4$.

1. La forma generale di f è

$$f(x) = A \cdot b^x$$

Le condizioni sono

$$\begin{cases} f(0) = 4 \\ f(10) = f(-10) \cdot \left(1 + \frac{70}{100}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cdot b^0 = 4 \Rightarrow A = 4 \\ A \cdot b^{10} = A \cdot b^{-10} \cdot 1.7 \end{cases}$$

$$b^{20} = 1.7 \Rightarrow b = \sqrt[20]{1.7}$$

Quindi

$$\boxed{f(x) = 4 \cdot \left(\sqrt[20]{1.7}\right)^x = 4 \cdot 1.7^{\frac{x}{20}}}$$

Nota: c'è più di un modo di scrivere la stessa funzione, e anche la scrittura $f(x) = 4 \left(\sqrt[20]{1.7}\right)^x$ è accettabile, così come qualsiasi scrittura che rappresenti la funzione cercata.

2. Siccome ora la condizione data coinvolge un integrale, potrebbe essere più comodo usare la forma generale

$$g(x) = A \cdot e^{k \cdot x}$$

Le condizioni date sono

$$\begin{cases} g(1) = e^6 g(-1) \Rightarrow A \cdot e^k = e^6 \cdot A \cdot e^{-k} \Rightarrow e^{2k} = e^6 \Rightarrow k = 3 \\ \int_{-1}^1 g(x) dx = 4 \Rightarrow \int_{-1}^1 A e^{kx} dx = 4 \Rightarrow A = \frac{4k}{e^k - e^{-k}} \end{cases}$$

$$A \cdot \left[\frac{1}{k} e^{kx}\right]_{-1}^1 = \frac{A}{k} (e^k - e^{-k})$$

Quindi

$$y(x) = \frac{12}{e^3 - e^{-3}} e^{3x}$$

ESERCIZIO E

VALUTAZIONE

- 3pt. 1. Scrivi un'equazione differenziale del primo ordine a coefficienti costanti che ammette la soluzione particolare $f(x) = e^{3x} + 5$.
- 3pt. 2. Scrivi un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti che ammette la soluzione particolare $g(x) = e^{2x} \sin(x)$.

1. L'equazione richiesta è della forma

$$f'(x) = a f(x) + b$$

Sostituendo $f(x) = e^{3x} + 5$ e $f'(x) = 3e^{3x}$ in questa equazione otteniamo

$$3e^{3x} = a(e^{3x} + 5) + b$$

$$(3-a)e^{3x} = a \cdot 5 + b$$

Affinché valga questa uguaglianza basta richiedere che

$$\begin{cases} 3-a = 0 \Rightarrow a = 3 \\ a \cdot 5 + b = 0 \Rightarrow 15 + b = 0 \Rightarrow b = -15 \end{cases}$$

Per cui abbiamo trovato l'equazione

$$f'(x) = 3f(x) - 15$$

Altro metodo

La soluzione generale di $f'(x) = a f(x) + b$ è

$$f(x) = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Desideriamo quindi che valga

$$(1) \cdot e^{3x} + (5) = (C) \cdot e^{ax} - \left(\frac{b}{a} \right)$$

Ci bastano quindi le condizioni:

$$c = 1$$

$$a = 3$$

$$-\frac{b}{a} = 5$$

Da cui l'equazione

$$\Rightarrow b = -5a = -15$$

$$\boxed{f'(x) = 3f(x) - 15}$$

2. Procediamo come nel punto 1., primo metodo.

$$g''(x) = a g'(x) + b g(x) + c$$

$$g(x) = e^{2x} \sin(x)$$

$$g'(x) = 2e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \cos(x)$$

$$g''(x) = 3e^{2x} \sin(x) + 4e^{2x} \cos(x)$$

Sostituendo g, g', g'' nella prima

$$3e^{2x} \sin(x) + 4e^{2x} \cos(x) = a \cdot (2e^{2x} \sin(x) + e^{2x} \cos(x)) + b \cdot e^{2x} \sin(x) + c$$

$$e^{2x} \sin(x) (3 - 2a - b) + e^{2x} \cos(x) (4 - a) + c = 0$$

Da cui le condizioni:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4 \\ 3 - 2a - b = 0 \Rightarrow b = 3 - 2a = -5 \end{cases}$$

Abbiamo quindi l'equazione

$$\boxed{g''(x) = 4g'(x) - 5g(x)}$$

Secondo metodo

Dobbiamo riconoscere, nell'espressione $g(x) = e^{2x} \sin(x)$,

la forma generale della soluzione dell'equazione omogenea $y''(x) = a y'(x) + b$ nel caso $\Delta = a^2 + 4b < 0$.

Questa è

$$y(x) = e^{\frac{a}{2}x} (C_1 \sin(wx) + C_2 \cos(wx))$$

con $w = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Desideriamo quindi che valga

$$e^{2x} \sin(x) = e^{\frac{a}{2}x} (C_1 \sin(wx) + C_2 \cos(wx))$$

È basta, per questo, avere

$$\frac{a}{2} = 2$$

$$w = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$a = 4$$

$\Downarrow$

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 1 \Rightarrow -a^2 - 4b = 4$$

$$b = \frac{-a^2}{4} - 1 = -5$$

Quindi l'equazione è

$$y''(x) = 4y'(x) - 5y(x)$$

ESERCIZIO F

Un bersaglio circolare, avente 30 cm di diametro, è suddiviso, mediante due circonferenze del diametro di 10 cm e 20 cm rispettivamente, in un cerchio centrale e due corone circolari concentriche. Il cerchio centrale vale 3 punti, la corona più interna 2, la corona esterna 1. La probabilità di colpire una delle tre regioni con una freccetta è proporzionale all'area della regione. Sapendo che la probabilità di colpire il bersaglio è del 60%, calcola la probabilità di colpire il centro. Qual è il valore atteso del punteggio ottenuto? E la varianza?

VALUTAZIONE

2 pt.

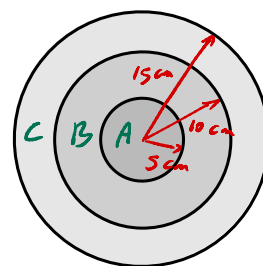
2 pt.

2 pt.

L'area del bersaglio, di $A_T = \pi \cdot 15^2 \text{ cm}^2$ è suddivisa in tre regioni A, B, C, di area rispettivamente $A_A = \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2$

$$A_B = \pi \cdot (10^2 - 5^2) \text{ cm}^2$$

$$A_C = \pi (15^2 - 10^2) \text{ cm}^2$$



1. Siccome la probabilità di colpire ciascuna regione è proporzionale alla misura della sua area, e la probabilità di colpire il bersaglio, in totale, è 0.6, abbiamo la proporzione $p_A : 0.6 = A_A : A_T$
 Quindi: $\underbrace{p_A}_{\text{probabilità di colpire il centro}}$

$$\boxed{p_A} = \frac{A_A \cdot 0.6}{A_T} = \frac{\cancel{\pi} \cdot 5^2 \cancel{\text{cm}^2} \cdot 0.6}{\cancel{\pi} \cdot 15^2 \cancel{\text{cm}^2}} \approx 0.0667$$

2. Procedendo come nel calcolo precedente otteniamo

$$p_B = \frac{A_B \cdot 0.6}{A_T} = 0.2 \quad p_C = \frac{A_C \cdot 0.6}{A_T} \approx 0.3333$$

Indicando con X la v.a. che rappresenta il punteggio abbiamo quindi la legge

X	3	2	1	0
p_x	0.0667	0.2	0.3333	0.4

← la probabilità di non colpire il bersaglio è $1 - 0.6 = 0.4$

Dunque

$$\boxed{E(X)} \approx 3 \cdot 0.0667 + 2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3333 = \boxed{0.9333}$$

$$3. E(X^2) \approx 3^2 \cdot 0.0667 + 2^2 \cdot 0.2 + 1^2 \cdot 0.3333 = 1.7333$$

$$\boxed{Var(X)} = E(X^2) - (E(X))^2 \approx \boxed{0.8622}$$