

Esercizi di algebra elementare

E5 - risolvi l'equazione:

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

Dobbiamo, intanto, semplificare l'equazione. Il metodo meno sofisticato è, chiaramente, sviluppare le potenze:

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Non è necessario ricordare a memoria queste formule, perché, all'occorrenza, si possono ricavare iterando calcoli più semplici. Per esempio:

$$(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = \dots$$

Tornando, però, all'esercizio originale, proviamo a svolgere i calcoli in una maniera diversa.

Sfruttiamo la formula $\square^2 - \Delta^2 = (\square + \Delta)(\square - \Delta)$

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

$$(x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 = 4(x^3-3x^2+3x-1) + 12x$$

$$(2x^2+2x+2) \cdot 2x = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + 12x$$

$$\cancel{4x^3} + \cancel{4x^2} + \cancel{4x} = \cancel{4x^3} - \overset{3}{\cancel{12x^2}} + \overset{6}{\cancel{24x}} - \overset{1}{\cancel{4}}$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\frac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$, ossia $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$.

Nota importante

A questo punto è fondamentale controllare la correttezza della soluzione. Un risultato sbagliato non vale niente, anzi, reca un danno se costituisce la base di calcoli successivi. Questa verifica non deve essere fatta per esteso: apparirebbe goffa e ridondante. Tuttavia, non farla significa esporre al rischio di vedere il proprio lavoro distrutto da un errore di calcolo, ed è un rischio stupido.

A scopo didattico, facciamo una verifica per iscritto. Nella pratica, poi, uno fa questi calcoli mentalmente o in brutta copia. Abbiamo trovato le soluzioni 1 e $\frac{1}{4}$. Ci accontenteremo di controllare il valore 1, ragionando che difficilmente un errore di calcolo può sovvertire una soluzione sola.

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x \\ \underbrace{(1+1)^4}_{16} &= \underbrace{(1^2+1)^2}_4 + \underbrace{4(1-1)^3}_0 + \underbrace{12 \cdot 1}_{12} \quad \underline{OK}\end{aligned}$$

E5 - semplifica l'espressione:

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2$$

Anche in qui possiamo sviluppare i prodotti:

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ac} + \cancel{ab} - b^2 + bc - \cancel{ac} + bc - c^2 \\ = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2 = a^2 - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2bc + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 2bc \\ = \boxed{a^2 + 4bc}$$

Oppure possiamo cercare di essere creativi usando la formula $\square^2 - \Delta^2 = (\square + \Delta)(\square - \Delta)$

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2 = \\ \underbrace{(a+(b-c)) \cdot (a-(b+c))}_{\downarrow} + (b+c)^2 = \\ \underbrace{a^2 - (b-c)^2 + (b+c)^2}_{\downarrow} = \\ a^2 + \underbrace{[(b+c) + (b-c)] \cdot [(b+c) - (b-c)]}_{\substack{2b \quad 2c}} = \\ \boxed{a^2 + 4bc}$$

Comunque si proceda, in questo calcolo è facile sbagliare, ottenendo, per errore, $a^2 + 2bc$, o $+5bc$, etc.

Anche qui, in brutta copia, dobbiamo fare una verifica. Basterà sostituire alcuni valori numerici alle variabili. Per esempio:

$$a=b=c=1 \quad (1+1-1) \cdot (1-1+1) + (1+1)^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{OK}$$

$$a=b=1, c=0 \quad (1+1-0) \cdot (1-1+0) + (1+0)^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 \quad \text{OK}$$

E5 - semplifica
$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18}$$

Notiamo, intanto, che è possibile trarre a fattor comune una x dal numeratore, ottenendo

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x^2 + 10x + 21)}{x^2 - 3x - 18}$$

Ora, per investigare la possibilità di semplificare la frazione, occorre fattorizzare i polinomi di secondo grado $x^2 + 10x + 21$ e $x^2 - 3x - 18$. C'è più di un approccio che possiamo seguire.

Fatto: consideriamo il polinomio $ax^2 + bx + c$. Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Allora sono possibili tre casi

- Se $\Delta < 0$, allora $ax^2 + bx + c$ non si fattorizza.
- Se $\Delta = 0$, allora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha una sola soluzione, e, detta x_0 questa soluzione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- Se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni x_1, x_2 e

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Applicando questo fatto a $x^2 + 10x + 21$, otteniamo $\Delta = 16$, quindi $x_{1,2} = -5 \pm 2$, e $x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$.

Procedendo allo stesso modo per il denominatore

$$\frac{x(x^2 + 10x + 21)}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)\cancel{(x+3)}}{(x-6)\cancel{(x+3)}} = \boxed{\frac{x(x+7)}{x-6}}$$

L'esercizio è concluso, ma notiamo che l'ultima uguaglianza non è tecnicamente corretta, perché, per $x = -3$, l'espressione a sinistra si riduce a $\frac{0}{0}$ che non ha senso, mentre a destra abbiamo $\frac{-12}{-9}$. Nell'uguaglianza

$$\frac{x(x+7)(x+3)}{(x-6)(x+3)} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

Non è, quindi, vero che il membro di destra ed il membro di sinistra rappresentano la stessa cosa qualunque sia il valore assegnato ad x . Questo accade, in realtà, per ogni valore di x eccetto -3 , per cui, se vogliamo essere molto scrupolosi, dobbiamo aggiungere alla nostra soluzione le parole "per $x \neq -3$ ". Nel nostro corso, possiamo fare a meno di questo sussiego, basterà avere presente che stiamo perpetrando un piccolo abuso del simbolo $=$.

È possibile risolvere il medesimo esercizio in maniera diversa. Per esempio, possiamo usare:

Teorema (di Ruffini) — Un polinomio $p(x)$ si fattorizza nella forma $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ se e solo se $p(x_0) = 0$.

In pratica, se abbiamo una soluzione x_0 della equazione $p(x)=0$, allora la regola di Ruffini ci assicura che possiamo scrivere

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (\text{un polinomio opportuno})$$

Una volta scoperta, o indovinata, la soluzione x_0 , il polinomio opportuno si può costruire semplicemente per aggiustamenti successivi.

Esempio: $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 \quad x_0 = 1$

Vediamo subito che $p(x_0) = 1 + 1 - 3 + 7 - 6 = 0$. Scriviamo:

$$x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 = (x - 1) \cdot (\quad ? \quad)$$

siccome vogliamo ottenere $x^5 + \dots$ nella parentesi dovremo scrivere un x^4

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + \dots \quad ? \quad) \\ &= x^5 - x^4 + \dots \end{aligned}$$

ora, il termine di quarto grado a destra ci viene $-x^4$, ma noi volevamo ottenere $+x^4$, dobbiamo quindi correggere aggiungendo $+2x^3$ nella parentesi

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + 2x^3 + \dots \quad ? \quad) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^3 + \dots \end{aligned}$$

ora i monomi x^5 e x^4 sono giusti, ma al grado tre, a sinistra non c'è alcun monomio, mentre, a destra, ci viene $-2x^3$, dobbiamo quindi aggiungere

nella parentesi $+2x^2$ per cancellarlo

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + \dots ?) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^2 + \dots\end{aligned}$$

Adesso bisogna aggiungere l'addendo di secondo grado. Procedendo così, alla fine, arriviamo a

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 6) \\ &= x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 \quad \underline{\text{ok}}\end{aligned}$$

Come si vede, alla fine, l'uguaglianza è soddisfatta.

Per tornare all'esercizio, per esempio, una volta fattorizzato il numeratore come $(x+7)(x+3)$, sappiamo che questi sono gli unici fattori che possiamo aver speranza di semplificare. Quindi, usando il teorema di Ruffini, possiamo verificare se questi fattori siano divisori del denominatore, controllando se il denominatore si annulla in -7 o -3 . Se sì, determiniamo la scomposizione come nell'esempio.

Ci sono ancora altre tecniche, che non sempre si insegnano nelle scuole. Per esempio l'algoritmo di Euclide è un modo diretto per scoprire se c'è e qual è il fattore che può essere semplificato. Esso si basa sull'idea seguente, ma, in generale, i passaggi sono più complicati.

Idem: se possiamo fare la semplificazione

$$\frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} = \frac{\cancel{A} \cdot B}{\cancel{A} \cdot C} = \frac{B}{C}$$

allora

$$\text{numeratore} - \text{denominatore} = AB - AC = A \cdot (B - C)$$

$$\begin{array}{c} \text{||} \qquad \qquad \qquad \text{ü} \\ (x^3 + 10x + 21) - (x^2 - 3x - 18) = 13x + 39 = 13 \overbrace{(x + 3)}^{\text{ü}} \end{array}$$

Non è richiesto di conoscere tutti i modi di venire a capo di questi calcoli: basta saper trovare la soluzione in qualche modo. Ripetiamo ancora una volta — quando si è trovata la soluzione

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

è consigliabile fare, in brutta copia, qualche verifica numerica.

E₅ - risolvi l'equazione: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3x^2+4x+1}$

In questa equazione sono presenti dei denominatori, bisognerà quindi gestire il fatto che i due membri dell'equazione non sono definiti (vale a dire non hanno senso, non sono numeri) quando un denominatore si annulla. Provvisoriamente, ignoriamo

questa difficoltà, e procediamo a risolvere la equazione come se fosse ben definita per ogni valore della x . Potremmo avere la tentazione di portare tutte le frazioni allo stesso membro

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x^2+4x+1} = 0$$

e poi ridurle a comun denominatore, però il calcolo si prospetta complicato. Forse, conviene separare le due frazioni più semplici dalla terza

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

$$x^2+x = 3x^2+4x+1$$

$$2x^2+3x+1 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

eseguendo la medesima operazione su cose uguali si ottengono cose uguali: invertiamo ambo i membri

Ora abbiamo ottenuto le soluzioni: $-\frac{1}{2}$ e -1 , però dobbiamo assicurarci che l'equazione sia ben definita per questi valori di x . Possiamo procedere sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{2}$ nei denominatori, così scopriamo che $x+1$ si annulla in $x=-1$, mentre nessuno dei denominatori si annulla in $x=-\frac{1}{2}$, quindi $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ è l'unica soluzione accettabile. In alternativa, possiamo risolvere le equazioni: $x=0$, $x+1=0$, $3x^2+4x+1=0$, quindi

escluderemo quelle fra -1 e $-\frac{1}{2}$ che sono anche
soluzione di una di queste equazioni. fino 1.2