

escluderemo quelle fra -1 e $-\frac{1}{2}$ che sono anche soluzioni di una di queste equazioni. fino 1.2

Eg- Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{x+1} \leq 2x+3$$

Un modo di procedere è portare tutti i termini della disequazione al primo membro e poi ridurre a comun denominatore

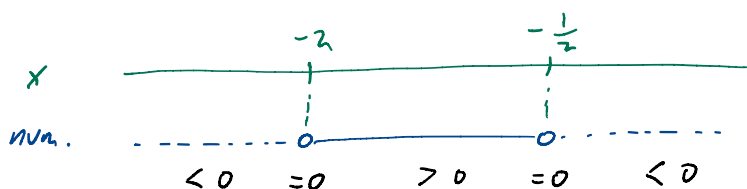
$$\frac{1}{x+1} - 2x - 3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - (2x+3)(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{-2x^2 - 5x - 2}{x+1} \leq 0$$

A questo punto studiamo il segno di numeratore e denominatore separatamente, in funzione di x .

Numeratore: $-2x^2 - 5x - 2$

si annulla in $\frac{5 \pm \sqrt{9}}{-4} \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$
 siccome il segno del coefficiente di x^2 è negativo, il numeratore è positivo fra questi due valori.

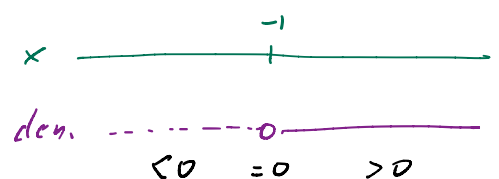


Denominatore: $x+1$

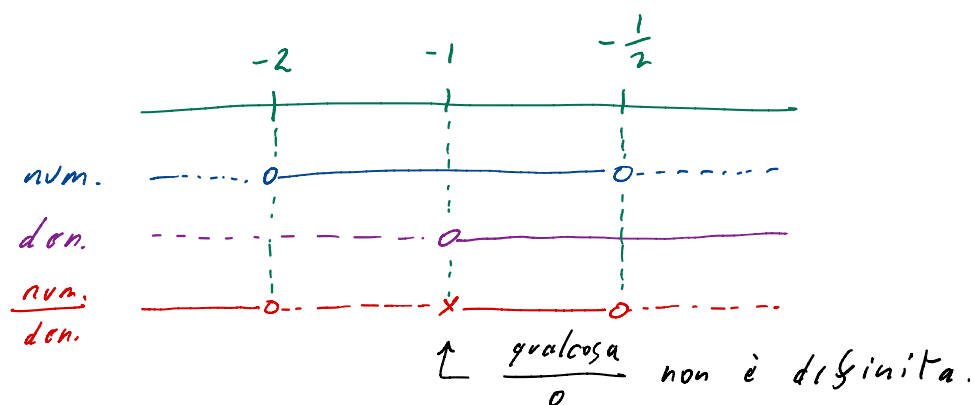
$$x+1 < 0 \iff x < -1$$

$$x+1 = 0 \iff x = -1$$

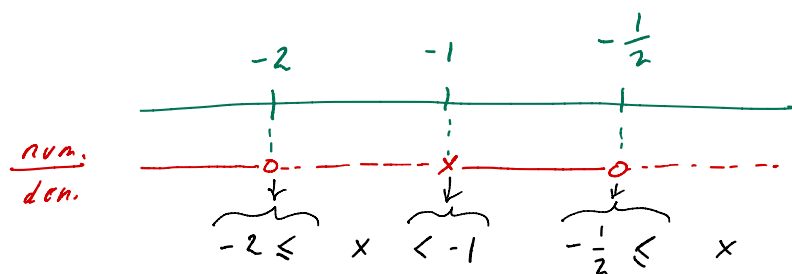
$$x+1 > 0 \iff x > -1$$



Combiniamo queste informazioni in un unico diagramma per mezzo della regola dei segni: $(\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +, \frac{+}{-} = \frac{-}{+} = -, \text{etc.})$



Infine leggiamo dal disegno la soluzione, ossia i valori di x per cui $\frac{\text{num.}}{\text{den.}} \leq 0$



$$\boxed{-2 \leq x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{2} \leq x}$$

Un altro modo di risolvere l'esercizio e procedere come segue

① Risolviamo l'equazione $\frac{1}{x+1} = 2x+3$ ignorando i problemi di annullamento del denominatore.

$$\frac{1}{x+1} = 2x+3 \Rightarrow 1 = (2x+3)(x+1) \Rightarrow 2x^2+5x+2=0 \begin{cases} \nearrow x=-2 \\ \searrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

② Troviamo i punti di annullamento dei denominatori.

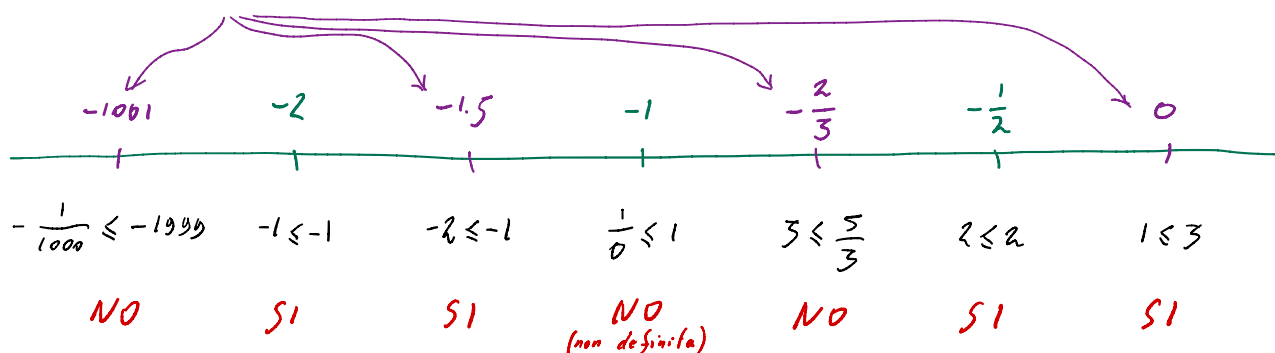
In questo caso c'è l'unico denominatore $x+1$.

$$x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

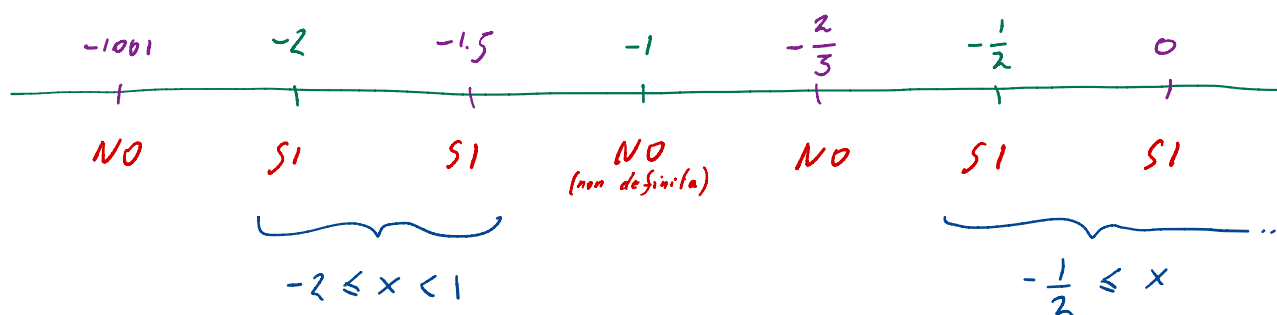
③ Individuiamo i numeri calcolati in ① e ② su una retta



④ Verifichiamo la disuguaglianza data $\frac{1}{x+1} \leq 2x+3$ nei punti indicati sul diagramma e negli intervalli fra di essi, usando, per ciascun intervallo, un valore arbitrario in esso contenuto.



Come prima, la soluzione si legge da questo diagramma



$$\boxed{-2 \leq x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{2} \leq x}$$

Proporzioni & percentuali

La proporzione

$$A : B = C : D$$

equivale — vale a dire che è un modo alternativo di scrivere

$$A \cdot D = B \cdot C$$

ossia, se non siamo troppo formali a proposito della possibilità che si annullino denominatori

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

In pratica, quindi, i segni : in $A : B = C : D$ sono semplicemente dei diviso, o, che è lo stesso, delle linee di frazione. Spesso, ma non esclusivamente, si usa la scrittura $A : B = C : D$ per suggerire che A e C rappresentano parti il cui totale è rispettivamente B e D .

Denominatori convenzionali — percentuali

Nelle situazioni in cui si parla di una parte ed un tutto, frequentemente, si rappresenta la frazione $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ raggrontando il tutto ad una quantità convenzionale. Nascono così le **percentuali**, quando si usa **100** per indicare la totalità, e, per esempio,

le parti per milione (ppm) quando il termine di paragone è 1.000.000 — queste ultime si usano spesso per indicare frazioni molto piccole, concentrazioni di impurità nei reagenti chimici, etc.

In pratica:

$$A \text{ è l' } x\% \text{ di } B \iff A:B = x:100 \iff A \cdot 100 = B \cdot x$$

Incrementare una quantità dello $x\%$ significa aggiungere a questa quantità il suo $x\%$, che, algebricamente, equivale a moltiplicare la quantità per $1 + \frac{x}{100}$.

Simmetricamente, diminuire una quantità dello $x\%$ significa moltiplicarla per $1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Aumentare dello } x\% \iff \text{Moltiplicare per } 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{Diminuire dello } x\% \iff \text{Moltiplicare per } 1 - \frac{x}{100}$$

Es. Il prezzo dell'oro sale del 10% , poi scende del 10% . In totale quale è stata la variazione percentuale del prezzo dell'oro?

L'esercizio coinvolge tre prezzi: un prezzo iniziale, uno intermedio, e uno finale. Abbiamo

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1} \quad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{10}{100}\right)}_{0.9}$$

Combinando queste due relazioni otteniamo

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 1.1 \cdot 0.9 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Il prezzo, in totale, è quindi sceso. Per trovare di quanto, dobbiamo scrivere 0.99 nella forma $1 - \frac{x}{100}$

$$0.99 = 1 - \frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{100} = 1 - 0.99 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Di conseguenza, il prezzo è sceso dell'1%.

E.s. Il prezzo del petrolio scende del 10%, poi sale del 10%, di quanto cambia in percentuale?

Qui crescita e decrescita sono scambiate rispetto all'esercizio precedente. Procediamo con lo stesso metodo.

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{10}{100}\right)}_{0.9} \quad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1}$$

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Nuovamente moltiplichiamo il prezzo per 0.99, quindi il risultato è il medesimo dell'esercizio precedente.

Nota: non è un caso che questi due risultati coincidano. Infatti, abbiamo detto che incrementare o decrementare una quantità di una certa percentuale equivale a moltiplicarla per determinati fattori. Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia. Di conseguenza, cambiando l'ordine

delle variazioni percentuali, il valore finale non cambia.

$$\begin{aligned} \text{finale} &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \\ &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \end{aligned}$$

Percentuali facili da ricordare

1%	$\frac{1}{100}$	99%	$\frac{99}{100}$
2%	$\frac{1}{50}$	98%	$\frac{49}{50}$
5%	$\frac{1}{20}$	95%	$\frac{19}{20}$
10%	$\frac{1}{10}$	90%	$\frac{9}{10}$
20%	$\frac{1}{5}$	80%	$\frac{4}{5}$
25%	$\frac{1}{4}$	75%	$\frac{3}{4}$
33%	$\approx \frac{1}{3}$	67%	$\frac{2}{3}$
50%	$\frac{1}{2}$		

Eg — Inizialmente i marziani verdi sono $\frac{2}{7}$ dei $\frac{5}{5}$ del totale dei marziani. Il 25% dei marziani emigra verso Venere, e, di questi, la metà è verde. Dopo la migrazione, che percentuale dei marziani rimasti è verde? Questo esercizio concerne due partizioni dell'insieme di tutti i marziani. Una è la divisione VERDE - NON VERDE e una la divisione EMIGRATO - RIMASTO. Possiamo quindi

schematizzare la situazione in questo diagramma

	VERDI	NON VERDI	
EMIGRATI	VE	$\bar{V}\bar{E}$	$VE =$ frazione di VERDI EMIGRATI
			$\bar{V}\bar{E} =$ " NON VERDI EMIGRATI
RINASTI	$V\bar{E}$	$\bar{V}E$	$V\bar{E} =$ " VERDI NON EMIGRATI
			$\bar{V}E =$ " NON VERDI NON EMIGRATI

I dati dell'esercizio sono i seguenti:

- la frazione dei marziani verdi è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$, ossia la somma dei numeri sulla prima colonna è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$
- la frazione dei marziani emigrati è il 25%, ossia la somma dei numeri sulla prima riga è $\frac{1}{4}$
- gli emigrati verdi sono la metà del 25%, ossia il numero nella casella in alto a sinistra è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$	

← somma $\frac{1}{4}$

↑ somma $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}$$

$$\frac{13}{280}$$

A questo punto non è difficile completare la tabella

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{13}{280}$	$\frac{187}{280}$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$$

Il totale delle caselle deve fare 1. Avendo calcolato le altre caselle, l'ultima è quindi obbligata a valere 1 - la loro somma.

La domanda dell'esercizio è
che percentuale dei marziani rimasti è verde?
Quando viene chiesta una percentuale, bisogna capire
quali siano questi due elementi: la parte e il tutto.
Nel nostro caso abbiamo

$$\text{tutto} = \text{marziani rimasti} = V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = \frac{3}{4}^*$$

$$\text{parte} = \text{marziani rimasti che sono verdi} = V\bar{E} = \frac{13}{280}$$

RisolviAMO la proporzione

$$\text{parte} : \text{tutto} = \text{percentuale} : 100$$

$$\text{percentuale} = \frac{13}{280} \cdot \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{130}{21} \approx 6.19$$

La risposta è quindi il 6.19 %

* Nota: questo numero si può calcolare facendo $\frac{13}{280} + \frac{187}{280}$,
però anche, più semplicemente, ricordando che

$$V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} + V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = 1 \quad \text{e} \quad V\bar{E} + V\bar{E} = \frac{1}{4}, \quad \text{da cui}$$

$$V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = (V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} + V\bar{E} + \bar{V}\bar{E}) - (V\bar{E} + V\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{fine 1.3}$$