

La domanda dell'esercizio è
 che percentuale dei marziani rimasti è verde?
 Quando viene chiesta una percentuale, bisogna capire
 quali siano questi due elementi: la parte e il tutto.
 Nel nostro caso abbiamo

$$\text{tutto} = \text{marziani rimasti} = V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = \frac{3}{4}^*$$

$$\text{parte} = \text{marziani rimasti che sono verdi} = V\bar{E} = \frac{13}{280}$$

Risolvi la proporzione

$$\text{parte} : \text{tutto} = \text{percentuale} : 100$$

$$\text{percentuale} = \frac{13}{280} \cdot \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{130}{21} \approx 6.19$$

La risposta è quindi il 6.19 %

* Nota: questo numero si può calcolare facendo $\frac{13}{280} + \frac{187}{280}$,
 però anche, più semplicemente, ricordando che

$$V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} + V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = 1 \quad \text{e} \quad V\bar{E} + V\bar{E} = \frac{1}{4}, \quad \text{da cui}$$

$$V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} = (V\bar{E} + \bar{V}\bar{E} + V\bar{E} + \bar{V}\bar{E}) - (V\bar{E} + V\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{fine 1.3}$$

E5 (esame scritto del 17.11.2019 — es A1 e A2)

In un collegio per studenti ci sono camere doppie e
 camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole,
 il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle
 singole è al pian terreno.

1- Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?

Procediamo come nell'esercizio precedente. Nuovamente abbiamo due distinzioni: SINGOLA - DOPPIA e TERRENO - ALTO.

	SINGOLA	DOPPIA	
ALTO	AS	AD	AS = frazione di SINGOLE in ALTO AD = " DOPPIE in ALTO
TERRENO	TS	TD	TS = " SINGOLE al p. TERRENO TD = " DOPPIE al p. TERRENO

Il testo dice che la colonna $AD + TD$ è il doppio di $AS + TS$.
Scrivendo $D = AD + TD$ e $S = AS + TS$ abbiamo:

$$\begin{cases} D = 2S \\ D + S = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \quad D = \frac{2}{3}$$

Inoltre il 10% delle doppie è al pian terreno

$$TD : D = 10 : 100 \Rightarrow TD = \frac{2}{30}$$

e il 20% delle singole è al pian terreno

$$TS : S = 20 : 100 \Rightarrow TS = \frac{2}{30}$$

È quindi facile completare la tabella. $\Rightarrow$

La percentuale richiesta è definita da

$$\text{TOTALE} = TS + TD = \frac{4}{30} \quad \text{PARTE} = TD = \frac{2}{30}$$

	SINGOLA	DOPPIA
ALTO	$\frac{8}{30}$	$\frac{18}{30}$
TERRENO	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$

La risposta è quindi 50%.

2- Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?

Per rispondere a questa domanda, prestiamo attenzione al fatto che si parla di studenti e non di camere. Le camere singole sono abitate da uno studente, e le doppie da due. Se denotiamo con C il numero totale delle camere, vediamo che

$$\text{ST. AL P. TERRENO IN SINGOLA} = C \cdot TS \cdot 1 = C \cdot \frac{2}{30}$$

$$\text{ST. AL P. TERRENO IN DOPPIA} = C \cdot TD \cdot 2 = C \cdot \frac{4}{30}$$

Quindi

$$\text{ST. AL P. TERRENO TOTALI} = C \cdot TS \cdot 3 = C \cdot \frac{6}{30}$$

Da cui si ricava la percentuale richiesta

$$\frac{\text{ST. AL P. TERRENO IN SINGOLA}}{\text{ST. AL P. TERRENO TOTALI}} = \frac{\cancel{C} \cdot \frac{2}{\cancel{30}}}{\cancel{C} \cdot \frac{6}{\cancel{30}}} = \frac{2}{6} \approx \boxed{33\%}$$

3- Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l' $x\%$ delle camere doppie è abitata da studentesse, e l' $y\%$ della studentesse è in doppia. Che relazione (che formula lega x e y)?

Ora il totale delle camere si divide lungo due nuovi assi: MASCHILE - FEMMINILE e SINGOLA - DOPPIA.

	singole doppie			SF = fruz. di singole gemminili sul tot.
femmin.	SF	DF	$\frac{2}{2}$	DF = " doppie gemminili "
masch.	SM	DM	$\frac{1}{2}$	SM = " singole maschili "
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		DM = " doppie maschili "

← calcolato alla domanda → $= \frac{2}{3}$

Il testo ci dice che

$$x : 100 = DF : (DM + DF)$$

quindi

$$DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}$$

Per quanto riguarda y , indicando di nuovo con C il totale delle camere, abbiamo

$$\text{num. studentesse in doppia} = C \cdot DF \cdot 2$$

$$\text{num. studentesse} = C \cdot DF \cdot 2 + C \cdot SF = C \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y : 100 = \cancel{C} \cdot DF \cdot 2 : \cancel{C} \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF}$$

Il nostro scopo è capire come si calcola y a partire da x . Ora sappiamo andare da x a DF , ma per poi ottenere y vediamo che serve anche SF . Occorre quindi un modo per calcolare SF o direttamente da x , o da DF . Per fortuna sappiamo che metà delle camere sono gemminili:

$$SF + DF = \frac{1}{2} \Rightarrow SF = \frac{1}{2} - DF$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF} = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + \frac{1}{2} - DF} = \cancel{100} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100} \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}}$$

moltiplicando per
6 num. e denom.

$$= \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}}$$

Per verificare i calcoli possiamo risolvere separatamente un caso particolare dell'esercizio, e controllare che, in questo caso almeno, la formula funzioni. Immaginiamo, per esempio, che tutte le studentesse siano in doppia, dovrà quindi venirci $y=100$. La situazione è questa

Quindi $\frac{DF}{1st. Doppie} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$, ossia i $\frac{3}{4}$ delle doppie sono femminili, e $x=75$.

Se non abbiamo sbagliato, mettendo $x=75$ nella nostra formula, dovremmo ottenere $y=100$. Proviamo:

singole doppie

sf 0	df $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
sm $\frac{1}{3}$	dm $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

femmin.
masch.

$$y = \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}} = \frac{8 \cdot 75}{3 + 4 \cdot \frac{75}{100}} = \frac{600}{3 + \frac{300}{100}} = 100 \quad \text{😊}$$

Modi di scrivere i numeri reali

• Notazioni algebriche

$$\sqrt{2}, 2\pi, \sin(30^\circ), e^{2.5}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0$$

pro: notazione assolutamente precisa

contro: è difficile farsi un'idea concreta dei numeri

es. $\sqrt{10}$ è più o meno di π ?

e^π " $\pi+20$?

• Notazione decimale

$$1.41, -42, 3.1415..., 128\,000\,000, 0.000\,000\,012\,345$$

pro: elementare confrontare e manipolare numeri

contro: alcuni numeri devono essere troncati

$$\text{es. } \pi = 3.1415..., \sqrt{2} = 1.4142..., \frac{1}{3} = 0.3333...$$

scomodo gestire numeri molto grandi o piccoli

$$\text{es. } 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,27 \text{ contro } 2.7 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{il numero di Avogadro } \approx 6.02 \cdot 10^{23}$$

Nota: conviene fare attenzione a non confondere il separatore decimale con il simbolo che separa gli elementi di una lista. Questa lista: 2.7,4,0.54,37.64,92 - sebbene scritta senza colori 2.7,4,0.54,37.64,92 - rimane leggibile senza ambiguità. Se ora rimpiazziamo

i punti con virgole, la lista diventa illeggibile

2,7,4,0,54,37,64,92

2,7,4,0,54,37,64,92  2.7,4.0,54.37,64.92
2,7.4,0,54.37,64.92 2.7,4,0.54,37.64,92

Per questa ragione, io, personalmente, preferisco usare il punto per separare le cifre decimali e la virgola per formare liste &c. Non è richiesto di conformarsi alla mia abitudine, è richiesto, tuttavia, di usare una notazione non ambigua.

• Notazione scientifica

$1.45 \cdot 10^4$, $-3.21 \cdot 10^6$, $4.5 \cdot 10^{-8}$, $6.00 \cdot 10^{-16}$

questo si chiama
"mantissa"

questo si chiama
"esponente"

segno: se non
c'è, è +

$(-)$ $1.45 \cdot 10^{(4)}$

regola: la mantissa deve essere < 10 e ≥ 1 .

(detto in altri termini, la mantissa deve avere esattamente una cifra prima della virgola, e questa cifra non può essere 0)

È sempre possibile ricondursi alla situazione prescritta dalla regola moltiplicando e dividendo per opportune potenze di 10.

es. $172.31 = 172.31 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.7231 \cdot 10^2$

$0.0092 = 0.0092 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 9.2 \cdot 10^{-3}$

$154 \cdot 10^9 = 154 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.54 \cdot 10^{11}$

pro: adatta a numeri molto grandi e molto piccoli
rappresenta chiaramente il numero di cifre significative (vedremo fra due lezioni)

contro: leggermente più complicata della notazione dec.

• Notazione ingegneristica

$14.5 \cdot 10^3, -3.21 \cdot 10^6, 45 \cdot 10^{-9}, 600 \cdot 10^{-18}$

Non è fondamentale conoscerla, corrisponde al tasto $\boxed{\text{ENG}}$ su molte calcolatrici.

regola: la mantissa deve essere < 1000 e ≥ 1 .

l'esponente deve essere multiplo di 3.

pro: si adatta bene ai prefissi SI

es $72 \cdot 10^6 \text{ J} = 72 \text{ MJ}$ "megajoule"

$3.4 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 3.4 \text{ fs}$ "femtosecondi"

fino 1.4