

$$10^5 = x \cdot 9.81 \frac{0.453}{2.54^2 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 2.54^2}{9.81 \cdot 0.453}$$

$$\approx 14.5$$

Quindi $1 \text{ bar} \approx \boxed{14.5 \text{ psi}}$

fine 1.5

Operazioni fra grandezze fisiche

Le quantità fisiche si comportano quasi come numeri, salvo che non tutte le operazioni sono lecite.

- Somme e sottrazioni sono lecite solo fra quantità omologhe, ossia riferite alla medesima grandezza — es. due lunghezze, due masse, etc. Numericamente, è necessario convertire le quantità alla medesima unità di misura prima di sommare o sottrarre i numeri.

Es. $30 \text{ cm} + 1.2 \text{ m} = 0.3 \text{ m} + 1.2 \text{ m} = 1.5 \text{ m}$

$12 \text{ A} + 15 \text{ kg}$ NON HA SENSO

$1.2 \text{ bar} + 5 \text{ psi} = 1.2 \text{ bar} + 0.34 \text{ bar} = 1.54 \text{ bar}$

- Prodotti e quozienti sono sempre leciti

Es. $\frac{7 \text{ kg}}{5 \text{ m}^3} = 1.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\frac{1 \text{ in}}{2 \text{ cm}} = \frac{2.54 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1.27$

- Esponenziali hanno senso solo se base ed esponente sono numeri puri — un numero puro è semplicemente un numero: una quantità senza dimensioni fisiche.

$7.1^{4.3} \text{ kg} = \begin{cases} 7.1^{4.3} \text{ kg} \\ 7.1^{4300} \text{ g} \\ 7.1^{4.3} \cdot 7.1^{43} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{EHI, MA} \\ \text{SONO DIVERSI!} \end{array} \right\} \quad \underline{7.1^{4.3} \text{ kg} \text{ NON HA SENSO}}$

Cifre significative

Se immaginiamo di scrivere una quantità numerica negli spazi di un modulo pre-stampato, potremmo trovarci, per esempio, ad inserire un prezzo dentro una griglia fatta così

PREZZO : $\square\square, \square\square$ €

Questo ci dice, in un istante, che il prezzo è minore di 100€ e che lo possiamo specificare con la precisione di un centesimo. Poiché da 0 a 100 ci sono 10000 incrementi di un centesimo, vediamo che 4 cifre possono essere scelte in $10000 = 10^4$ modi diversi. Più in generale n cifre si possono scegliere in 10^n modi. Ragionando al contrario, quindi in maniera un po' imprecisa, possiamo dedurre che, se leggiamo un dato che è scritto con quattro cifre di precisione, per esempio

massa = 42.84 kg

questo rappresenta una di 10000 possibilità. Supponiamo, adesso, di dover usare questo

numero in un certo calcolo, come

$$\text{peso} = \text{massa} \cdot 9.807 \text{ m/s}^2$$

Procedendo aritmeticamente otterremmo

$$\text{peso} = 42.84 \cdot 9.807 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 420.13188 \text{ N}$$

Il numero 420.13188 è giusto, ma suggerisce un'idea sbagliata, ossia che noi conosciamo il peso così precisamente da saper dire quale sia la cifra esatta dei centomillesimi.

Non sappiamo questa cifra perché $\frac{1}{100.000} \text{ N}$ corrisponde, grosso modo, a un milionesimo di kg, e noi abbiamo la massa solo fino alla cifra dei centesimi. Per dare un risultato onesto, occorre quindi indicare il peso con meno cifre di quante ne abbiamo ottenute aritmeticamente.

Ma quante? Dobbiamo ragionare che il dato di 42.84 kg è, si è detto, uno fra 10000 possibili. Se, a ciascuno di questi corrisponde un risultato, anche i risultati possibili sono 10000. Quindi indicheremo il risultato con quattro cifre di precisione.

$$\text{peso} = 420.1 \text{ N}$$

In definitiva, abbiamo scoperto la regola seguente

Regola: quando una computazione si basa su dati soggetti incertezze, in generale, conviene esprimere il risultato con tante cifre significative quante il meno preciso dei dati.

Possiamo illustrare ulteriormente questo concetto considerando l'esercizio seguente

Eg. Misuriamo il diametro interno di un condotto avente sezione circolare utilizzando un calibro che permette di leggere il decimo di millimetro, e otteniamo

$$\text{diametro} = 45.2 \text{ mm}$$

Quanto vale l'area della sezione del tubo (in cm^2)?

Chiaramente dobbiamo calcolare

$$\text{area} = \text{raggio}^2 \cdot \pi = \left(\frac{\text{diametro}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 16.0459986... \text{ cm}^2$$

CIFRE SIGNIFICATIVE

Secondo la regola, tuttavia, solo le prime tre di queste sono significative. Il risultato va quindi riportato nella forma

$$\boxed{\text{area} = 16.0 \text{ cm}^2}$$

Ma perché questa scelta è ragionevole?

L'esercizio ci dice che la misura è stata eseguita con uno strumento che permette di leggere il decimo di millimetro. Quindi, per quanto ne sappiamo, il diametro reale potrebbe sì essere esattamente 45.2 mm, ma potrebbe ugualmente essere, per esempio, 45.24 mm o 45.18 mm. Tutte queste lunghezze verrebbero lette come 45.2 mm dal nostro calibro che non permette di misurare i centesimi di millimetro. Proviamo a calcolare l'area in ciascuno dei tre casi

diámetro [mm]	area [cm ²]
45.18	16.0318...
45.2	16.0450...
45.24	16.0744...

Come si vede, noi possiamo dire di sapere le cifre che la regola indica come significative, perché non dipendono da quale dei casi possibili è quello vero. Non possiamo, tuttavia, dire onestamente di sapere le altre, perché la nostra misura non ci permette di escludere nessuno dei casi considerati.

Nota importante: nei passaggi intermedi bisogna lavorare con almeno due cifre significative in più rispetto alla precisione richiesta.

La regola parla di cifre significative perché non tutte le cifre lo sono. Se avessimo espresso la massa di 42.84 kg in tonnellate, avremmo scritto

$$\text{massa} = 0.04284 \text{ t}$$

Questo è lo stesso dato di prima, quindi è chiaro che deve ancora avere le sue quattro cifre significative, segno che lo 0.0 iniziale non è significativo.

Quegli zeri lì sono, infatti, dei meri segna-posto. Serrano per dire che il 4 successivo si trova nella posizione dei centesimi, e, se scrivessimo il numero in notazione scientifica, sparirebbero.

$$\text{massa} = 4.284 \cdot 10^{-2} \text{ t}$$

Quali cifre sono significative e quali, invece, segna posto?

Regola (versione 1)

- In notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative

- Gli zeri alla fine di un numero intero (senza indicazione di cifre decimali) sono segna-posto.
- Gli zeri all'inizio di un numero del tipo 0... sono segna-posto.

Esempi (le c.s. sono sottolineate in verde)

24 0.24 2.4 0.024 24000 $2.4 \cdot 10^{-70}$

2 cifre significative

240.0 240 0.024 1.024 0.0240 $7.400 \cdot 10^{-2}$

4 c.s. 2 c.s. 2 c.s. 4 c.s. 3 c.s. 4 c.s.

Attenzione al numero 240.0

Siccome il .0 finale non è necessario per specificare il posto delle altre cifre, quello non può essere un segna-posto. Quindi deve essere significativo.

Regola (versione 2)

Alle volte gli zeri all'inizio o alla fine di una scrittura decimale non sono significativi:

- Se rimuovere uno zero cambierebbe il numero, quello zero non è significativo.
- Se rimuovere uno zero non cambierebbe il numero, quello zero è significativo.

Nota La regola per contare le cifre significative è da intendersi più come un consiglio di prudenza che come una norma ferrea. Se, per esempio, leggiamo sul giornale che 6000 persone hanno preso parte ad una manifestazione, è sensato credere che quel 6000 sia un'approssimazione, e che, magari, le persone erano in realtà 5784 o 6319. Insomma, è naturale pensare che solo il 6 sia significativo, mentre verosimilmente gli zeri sono frutto di un arrotondamento — appunto una cifra significativa come secondo la regola. Non è assicurato che sia così: è improbabile, ma possibile, che il giornalista volesse dire che esattamente 6000 persone hanno partecipato (contate come?), ma, in quel caso, forse avrebbe fatto meglio a scrivere "esattamente 6000". Non potendo sapere con assoluta sicurezza, conviene assumere l'interpretazione più probabile, che è anche la più sicura. Infatti, se considerassimo quel 6000 un numero esatto, e fossimo in errore, allora vedremmo un'informazione là dove non c'è — negli zeri del 6000 — e questo è gravissimo. Seguendo la regola, invece, al massimo rischiamo di scartare un pò di informazione buona, ma non di introdurne di falsa.

Arrotondamenti

Quando si riduce il numero di cifre significative in una scrittura decimale, è necessario arrotondare l'ultima cifra significativa in modo tale da rendere il numero arrotondato più vicino possibile al valore esatto.

Per esempio, se stiamo arrotondando il numero 42.824 alla prima cifra dopo la virgola, possiamo arrotondare per difetto a 42.8 , oppure per eccesso a 42.9 . In questo caso è corretto scegliere l'arrotondamento per difetto, 42.8 , perché, fra i due, è il più vicino al numero dato

$$\begin{array}{l} \text{approssimazione} \rightarrow 42.8 \\ \text{corretta} \\ 42.824 \\ 42.9 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{distanza} = 42.824 - 42.8 = 0.024 \\ \text{distanza} = 42.9 - 42.824 = 0.076 \end{array} \right.$$

Se, invece, arrotondiamo 31.764 , di nuovo alla prima cifra decimale, la situazione si inverte.

$$\begin{array}{l} 31.7 \\ 31.764 \\ \text{approssimazione} \rightarrow 31.8 \\ \text{corretta} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{distanza} = 31.764 - 31.7 = 0.064 \\ \text{distanza} = 31.8 - 31.764 = 0.036 \end{array} \right.$$

La regola da seguire in pratica è semplice: se la prima cifra troncata è $0...4$ si arrotonda per difetto, se la prima cifra troncata è $5...9$ per eccesso.

$$42.8\dot{2}4 \xrightarrow{2 \text{ è } 0...4} 42.8 \qquad 31.7\dot{6}4 \xrightarrow{6 \text{ è } 5...9} 31.8$$

Esercizio. Calcola la soluzione positiva dell'equazione

$$3.1 \cdot 10^{-3} x^2 + 1.2 \cdot 10^2 x - 2.4 = 0$$

con due cifre significative di precisione.

Questo esercizio è stato costruito apposta per illustrare l'effetto devastante che può avere l'errore di lavorare con una precisione insufficiente nei passaggi intermedi.

Facciamo dapprima il calcolo in maniera molto precisa

$$\underbrace{3.1 \cdot 10^{-3}}_{0.0031} x^2 + \underbrace{1.2 \cdot 10^2}_{120} x - 2.4 = 0$$

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.02976}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001239393...}{0.0062} = 0.01999998...$$

È chiaro che la risposta giusta, correttamente arrotondata, è 0.020. Studiamo, però, cosa sarebbe avvenuto se avessimo usato due sole cifre significative nei passaggi intermedi

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14000}}{0.0062} = \frac{-120 + 120}{0.0062} = 0 \quad \text{OPS!}$$

Siccome questo esercizio presenta una situazione estrema, anche seguendo la regola generale di tenere due cifre significative in più di quelle desiderate avremmo ottenuto zero. Per ottenere un risultato diverso da zero, dobbiamo lavorare con non meno di sette cifre significative.

Proviamo a ripetere il calcolo con 7

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.03}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001}{0.0062} = 0.016$$

il risultato è ancora sbagliato, e solo lavorando con otto cifre otteniamo, finalmente, il risultato giusto

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.030}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.00012}{0.0062} = 0.020$$

Morale.

Le sottrazioni fra numeri vicini — $120.00012 - 120$ — possono causare **disastrose perdite di precisione**. Quando ci si trova in una situazione come questa, è consigliabile usare, nei passaggi intermedi, la massima precisione di cui si può disporre.

Morale 2

È utilissimo, permette di risparmiare tempo, e di evitare errori, usare le funzioni memoria delle calcolatrici, anziché scrivere e ri-ingrassare i risultati intermedi.

Curiosità

Il procedimento seguente è pericoloso, ma avrebbe condotto al risultato giusto

$$\underbrace{0.0031 \cdot x^2} + 120 \cdot x - 2.4 = 0$$

Questo è piccolo: lo trascuro provvisoriamente

$$120 \cdot x - 2.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2.4}{120} = 0.020$$

Constato che $0.0031 \cdot 0.020^2 \approx 0.0000012$ è effettivamente

molto piccolo rispetto a $120 \cdot 0.020$ e a 2.4 , quindi la scelta provvisoria di trascurare quel termine, a posteriori, è giustificata, pertanto il risultato ottenuto, $x = 0.020$, è accettabile.

sino 1.6