

molto piccolo rispetto a $120 \cdot 0.020$ e a 2.4 , quindi la scelta provvisoria di trascurare quel termine, a posteriori, è giustificata, pertanto il risultato ottenuto, $x = 0.020$, è accettabile. fino 1.6

La teoria degli errori

Le cifre significative offrono un'idea rozza di quanto sia preciso un certo dato di origine sperimentale. La teoria degli errori permette di quantificare le incertezze di misura in modo preciso.

Attenzione: gli errori di cui si parla sono le incertezze inevitabili nelle misure sperimentali. Gli sbagli e i guai derivanti da uno strumento guasto, o da una tecnica approssimativa, non sono oggetto della teoria degli errori.

Se scriviamo un dato sperimentale nella forma

$$\text{massa} = (42.84 \pm 0.03) \text{ kg}$$

vogliamo dire che siamo incerti sul valore, in questo caso, della massa, però sappiamo che questo valore è probabilmente compreso fra $(42.84 - 0.03) \text{ kg}$ e $(42.84 + 0.03) \text{ kg}$.

Quindi la scrittura precedente significa
"probabilmente $42.81 \text{ kg} \leq \text{massa} \leq 42.87 \text{ kg}$ "
Chiameremo l'intervallo $42.81 \leq \dots \leq 42.87$ (o, più
formalmente, $[42.81, 42.87]$) intervallo di
incertezza (altri nomi: intervallo di fiducia,
i. di errore, i. di confidenza).

Nota. Nelle formule precedenti, l'unità di misura kg
si comporta, algebricamente, come se fosse una varia-
bile moltiplicata per i valori numerici. Per questa
ragione, preferisco scrivere $(42.84 \pm 0.03) \text{ kg}$ anziché
 $42.84 \pm 0.03 \text{ kg}$, per indicare che l'unità kg si applica
sia al valore 42.84 sia all'incertezza 0.03. Se non
c'è rischio di ambiguità, tuttavia, entrambe le scrittu-
re sono ammissibili.

Definizione (errore assoluto)

La scrittura

$$x = x_0 \pm \delta x$$

significa

"probabilmente $x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x$ "

La quantità δx si chiama errore assoluto
di x e l'intervallo $[x_0 - \delta x, x_0 + \delta x]$ si
chiama intervallo di incertezza di x .

Nota. Abbiamo usato la parola "probabilmente". Non è impossibile specificarne in maniera esatta il significato, ma, per farlo, servono conoscenze di statistica che esulano dal programma di questo corso.

Esempio

Nella scrittura $\text{raggio} = (41.4 \pm 0.2) \text{ cm}$

l'errore assoluto è 0.2 cm

l'intervallo di incertezza $\underbrace{41.2 \text{ cm}}_{41.4 - 0.2} \leq \text{raggio} \leq \underbrace{41.6 \text{ cm}}_{41.4 + 0.2}$

La formula della definizione

$$x = x_0 \pm \delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x$$

permette di passare dall'errore assoluto all'intervallo di incertezza. Viceversa, se conosciamo un intervallo di incertezza $\alpha \leq x \leq \beta$, possiamo ricavare la scrittura $x = x_0 \pm \delta x$ dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \delta x \\ \beta = x_0 + \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \beta - \alpha = 2\delta x \Rightarrow \delta x = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi stabilito la formula per il passaggio inverso

$$\alpha \leq x \leq \beta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Come vedremo, questa formula si usa per calcolare δx ,

tuttavia spesso è conveniente calcolare x_0 in altro modo.

Nota. La parola "assoluto" nella locuzione "errore assoluto" non è lì per rendere il linguaggio più pomposo, e così incutere soggezione nella plebe ignorante. Semplicemente, introdurremo in futuro il concetto di "errore relativo", serve quindi per non far confusione.

Vediamo ora come tener conto del modo in cui le incertezze di misura si propagano nei calcoli.

Va da sé che un risultato basato su dati incerti è, a sua volta, affetto da incertezza. In altri termini gli errori sui dati si propagano attraverso i calcoli e generano un errore sul risultato.

Ci sono varie regole per tener conto di questa propagazione, ma tutte discendono dalla seguente.

Regola delle regole (della propagazione degli errori)

L'intervallo di incertezza sul risultato ha come estremi il minimo e il massimo valore ottenibile al variare dei dati nei loro rispettivi intervalli di incertezza

Esercizio $x = 4.0 \pm 0.4 \Rightarrow y = x + \sqrt{x} = ?$

Innanzitutto, se non ci fossero di mezzo le incertezze, avremmo semplicemente $x_0 = 4.0$ quindi $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0} = 4 + \sqrt{4} = 6$

La risposta all'esercizio sarà quindi del tipo $y = 6 \pm \delta y$, e noi dobbiamo determinare l'errore assoluto δx .

L'intervallo di incertezza di x è $\underbrace{3.6}_{4.0-0.4} \leq x \leq \underbrace{4.4}_{4.0+0.4}$, studiamo $x + \sqrt{x}$ al variare di x in

questo intervallo.

Come si vede, y varia nell'intervallo di incertezza

$\underbrace{5.497}_a \leq y \leq \underbrace{6.498}_b$

x	3.6	4.0	4.4
$x + \sqrt{x}$	5.497	6.000	6.498

seguiamo la regola generale di tenere, nei passaggi intermedi, qualche cifra in più.

Otteniamo quindi $\delta y = \frac{b-a}{2} = 0.5005$, $y = 6.000 \pm 0.5005$

Si pone ora questo problema:

A che cifra è opportuno arrotondare il risultato?

Regola (di massima)

Le incertezze si arrotondano a una cifra significativa.

Con una eccezione: che se questa cifra è un 1, allora conviene arrotondare a due cifre significative.

I valori affetti da incertezza si arrotondano alla medesima posizione decimale dell'incertezza corrispondente (es. se l'incertezza è arrotondata alla cifra dei centesimi, anche

il valore deve essere arrotondato alla cifra dei centesimi)

Alla luce di questa regola, s_y va arrotondato a 0.5, ossia ai decimi, di conseguenza anche y va arrotondato ai decimi, dando 6.0. La risposta è quindi $y = 6.0 \pm 0.5$

Nota Se, anziché calcolare il valore 6.0 di y in maniera diretta, avessimo usato la formula $y_0 = \frac{a+b}{2}$, avremmo ottenuto $y_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{5.497 + 6.498}{2} = 5.998$ e questo valore, arrotondato alla cifra dei decimi, fa proprio 6.0. È consigliabile però seguire il metodo diretto, se non altro perché serve da controllo sul calcolo dell'errore: se il valore calcolato direttamente non viene al centro dell'intervallo di incertezza, allora qualcosa non va.

Giustificazione della regola di massima

Ai fini del corso non è necessario sapere questa giustificazione: è soltanto NECESSARIO APPLICARE CORRETTAMENTE LA REGOLA. Però questo discorso può aiutare a capire le cose.

Se qualcuno ci dicesse che la massa di un campione è

$$M = (25.000 \pm 0.314) \text{ g}$$

dovremmo credergli? Questa persona ci starebbe dicendo che i valori di M compresi fra 24.686 g e 25.314 g — una escursione di oltre mezzo grammo — sono

plausibili, ma aggiungi un milligrammo e 25.315 no, questo valore è implausibile. Non è realistico che la massa M sia incerta nell'arco di oltre 600 milligrammi, ma questa stessa incertezza sia nota al milligrammo.

Per quanto, forse, l'idea di sapere molto esattamente di non sapere qualcosa sarebbe potuta piacere a Socrate, viene da chiedersi come faccia il nostro sperimentatore a essere tanto certo a proposito di una cosa su cui è tanto incerto. Conviene diffidare, ma, se anche fosse, conoscere l'incertezza con tanta precisione non servirebbe a molto.

All'atto pratico, sarà possibile e desiderabile sapere l'incertezza con una precisione commisurata all'incertezza stessa — se sono incerto di qualche grammo, potrò gloriarmi di quanto sono incerto al grammo — e questa è appunto la definizione di avere una cifra significativa. Non dilunghiamoci sull'eccezione per l'uno: serve per evitare alcuni casi in cui l'errore di arrotondamento sarebbe eccessivo.

L'incertezza sulla nostra massa va quindi espressa come ± 0.3 g, ma perché il valore della massa va poi indicato come 25.0 g? I valori plausibili per questa massa sono quelli compresi fra 24.7 g e 25.3 g. Per esempio

M potrebbe essere 24.73g o 24.89g o 25.17g .
Cosa si può dire a proposito delle cifre di questi valori.

- la cifra delle decine di grammi: è 2
- la cifra dei grammi: è 4 o 5
- la cifra dei decigr.: può essere 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3
- la cifra dei centigr.: *BOM?* può essere qualunque cifra.

Fino alla cifra a cui è stata arrotondata l'incertezza può, concepibilmente, essere ancora contenuta informazione utile, le successive, però, sono essenzialmente prese a caso. Per questo la regola dice di arrotondare alla medesima cifra dell'incertezza.

Esercizio calcolare $x-y$ sapendo che
 $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

Gli intervalli di incertezza sono
per x , $7.2 \leq x \leq 8.0$ (ossia $x \in [7.2, 8.0]$)
per y , $1.2 \leq y \leq 1.6$ (ossia $y \in [1.2, 1.6]$)

Qual è il minimo valore possibile per $x-y$?
Per far sì che $x-y$ sia più piccolo possibile, devo partire dalla x più piccola e sottrarre la y più grande: $7.2 - 1.6 = 5.6$.

Analogamente, otterrò il massimo di $x-y$ sottraendo la y più piccola dalla x più grande: $8.0 - 1.2 = 6.8$. Ho così ottenuto l'intervallo di incertezza

$$5.6 \leq x-y \leq 6.8$$

Procedendo come nell'esercizio precedente

$$x-y = 6.2 \pm \frac{6.8 - 5.6}{2} = \boxed{6.2 \pm 0.6}$$

Nota

Può capitare che non sia facile ragionare su quale combinazione dei dati dia il minimo e quale il massimo risultato. Nei casi di difficoltà conviene calcolare i risultati corrispondenti a tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza dei dati, per poi vedere quali dei valori ottenuti siano il massimo e il minimo.

La regola della regola permette sempre di propagare le incertezze correttamente, però, nei casi più frequenti, c'è modo di eseguire i calcoli in maniera più spedita.

Vediamo intanto il caso delle somme algebriche

Regola (somme algebriche)

$$\text{Se } x = x_0 \pm \delta x \quad \text{e} \quad y = y_0 \pm \delta y$$

$$\text{allora } x + y = x_0 + y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

Questa regola, per esempio, permette di risolvere senza fatica l'esercizio precedente

Esercizio calcolare $x - y$ sapendo che

$$x = \underbrace{7.6}_{x_0} \pm \underbrace{0.4}_{\delta x} \quad \text{e} \quad y = \underbrace{1.4}_{y_0} \pm \underbrace{0.2}_{\delta y}$$

Soluzione $x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y) = 7.6 - 1.4 \pm (0.4 + 0.2) = \boxed{6.2 \pm 0.6}$

Attenzione: quando si calcola l'incertezza su una DIFFERENZA gli errori si sommano, non si sottraggono!

Per parlare di prodotti e quozienti conviene introdurre l'errore relativo

Definizione (errore relativo)

L'errore relativo su una quantità

$$x = x_0 \pm \delta x \quad \text{è il numero } \frac{\delta x}{x_0}.$$

Uualmente, si indica l'errore relativo in forma percentuale

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

La medesima incertezza si può indicare come errore assoluto e come errore relativo.

Formule di conversione

ERRORE ASSOLUTO

$$x = x_0 \pm \delta x$$

$$x = x_0 \pm \frac{\alpha \cdot x_0}{100}$$

ERRORE RELATIVO

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

$$x = x_0 \pm \alpha \%$$

Esempi

$$(120 \pm 6) \text{ m} \longrightarrow (120 \pm 5\%) \text{ m}$$

$$(30.0 \pm 2\%) \text{ V} \longrightarrow (30.0 \pm 0.6) \text{ V}$$
$$30 \pm \frac{2 \cdot 30}{100}$$

~~$(37 \pm 5\%)^\circ\text{C}$~~ NON HA SENSO!

Attenzione Gli errori relativi non hanno senso applicati a misure basate su uno zero convenzionale (es. $^\circ\text{C}$, ora del giorno).

Regola (prodotti e quozienti)

$$\text{Se } x = x_0 \pm \alpha\% \quad \text{e} \quad y = y_0 \pm \beta\%$$

$$\text{allora } x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

$$x / y = x_0 / y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

Ex $x = 7.0 \pm 2\%$ $y = 5.0 \pm 1\%$ $\Rightarrow x \cdot y = ?$ $\frac{x}{y} = ?$

Sol. $x \cdot y = \underbrace{35}_{7.0 \cdot 5.0} \pm \underbrace{3\%}_{2+1}$ $\frac{x}{y} = \underbrace{1.4}_{7.0/5.0} \pm \underbrace{3\%}_{2+1}$

since 1.2