

Eg $x = 7.0 \pm 2\%$ $y = 5.0 \pm 1\%$ $\Rightarrow x \cdot y = ?$ $\frac{x}{y} = ?$

Sol. $x \cdot y = 35 \pm 3\%$ $\frac{x}{y} = 1.4 \pm 3\%$

$\underbrace{7.0 \cdot 5.0}_{2+1}$
 $\underbrace{7.0/5.0}_{2+1}$

fine l.7

Eg Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Per risolvere questo esercizio con la regola per i prodotti è necessario prima convertire gli errori assoluti in errori relativi, calcolare l'errore relativo sul risultato, ed infine eseguire la conversione opposta.

$$\begin{aligned}
 (20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3) &= 150.0 \pm 6\% \\
 \underbrace{\pm 2\%} \quad \underbrace{\pm 4\%} & \quad \underbrace{2+4} \\
 &= 150.0 \pm 9.0 = \boxed{150 \pm 9} \\
 & \quad \underbrace{150 \cdot \frac{6}{100}}
 \end{aligned}$$

arrotondamento corretto.
↓

Avremmo anche potuto seguire il metodo diretto.

Dritto $y = (20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
 \underbrace{141.12}_{19.6 \cdot 7.2} &\leq y \leq \underbrace{159.12}_{20.4 \cdot 7.8} \quad \Rightarrow \quad y = 150 \pm \frac{159.12 - 141.12}{2} \\
 &= \boxed{150 \pm 9}
 \end{aligned}$$

Notiamo che anche usando la formula sconsigliata

$y_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ avremmo ottenuto $y_0 = \frac{159.12 + 141.12}{2} = 150.12$ che si arrotonda a 150.

Abbiamo enunciato regole per la propagazione degli errori in somme o prodotti. Da quest'ultima si può dedurre una regola per le potenze — poiché le potenze sono prodotti ripetuti — e dalla regola per le potenze una per le radici — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ —. In definitiva si giunge allo specchietto seguente.

Riassunto delle regole di teoria degli errori

$$\begin{aligned} (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 + y_0) \pm (\delta x + \delta y) \\ (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 - y_0) \pm (\delta x + \delta y) \end{aligned}$$

+ e -
si sommano
gli errori
assoluti

$$\begin{aligned} (x_0 \pm \alpha\%) \cdot (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 \cdot y_0) \pm (\alpha + \beta)\% \\ (x_0 \pm \alpha\%) / (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 / y_0) \pm (\alpha + \beta)\% \end{aligned}$$

· e /
si sommano
gli errori
relativi

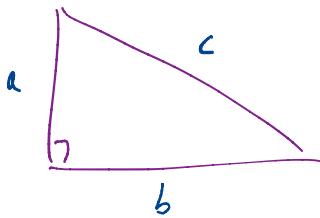
$$(x_0 \pm \alpha\%)^n = x_0^n \pm (n \cdot \alpha)\%$$

$$\sqrt[n]{x_0 \pm \alpha\%} = \sqrt[n]{x_0} \pm \frac{\alpha}{n}\%$$

$$(x_0 \pm \delta x) \cdot k = x_0 \cdot k \pm \delta x \cdot |k|$$

Eg (esame online del 15-IV-2020, es. C)

L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $50 \pm 2\%$ e uno dei cateti $30 \pm 5\%$. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.



Denotando l'ipotenusa con c ed il cateto dato con a , calcoliamo il secondo cateto b usando il teorema di Pitagora.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(50 \pm 2\%)^2 - (30 \pm 5\%)^2}$$

$$= \sqrt{(2500 \pm 4\%) - (900 \pm 10\%)}$$

$\underbrace{2500}_{2 \cdot 2\%} \quad \underbrace{900}_{2 \cdot 5\%}$

Regola per la potenza

$$= \sqrt{(2500 \pm 100) - (900 \pm 90)}$$

Passo a errore assoluto per poter fare la differenza

$\underbrace{2500}_{2500 \cdot \frac{4}{100}} \quad \underbrace{900}_{900 \cdot \frac{10}{100}}$

$$= \sqrt{1600 \pm 190} = \sqrt{1600 \pm 12\%} = \boxed{40 \pm 6\%}$$

$\underbrace{1600}_{100+90} \quad \underbrace{190}_{\frac{190}{1600} \cdot 100}$

Regola per la somma alg.

Passo a e. rel. per applicare la regola per le radici

$\frac{12}{2}$: regola per le radici.

Esercizio $x = 4.0 \pm 0.4 \Rightarrow y = x - \sqrt{x} = ?$

Risolviamo, intanto, l'esercizio con il metodo dell'intervallo di incertezza. Questo procedimento è molto simile ad uno già visto. Per la x abbiamo $3.6 \leq x \leq 4.4$.

x	3.6	4.0	4.4
$x - \sqrt{x}$	1.703	2.000	2.302

Quindi $y = 2.000 \pm \frac{2.302 - 1.703}{2} = \boxed{2.0 \pm 0.3}$

Potremmo essere tentati, d'altro canto, di calcolare l'incertezza usando le formule per la radice e per la somma. Usare queste formule sarebbe un procedimento *sottottimale* — non è corretto, ma produce una stima dell'errore che è più grande di quella giusta (e chiaramente *soprastimare* l'errore è meglio che *sottostimarlo*).

PROCEDIMENTO SOTTOOTTIMALE (sbagliato ma non troppo) !?!
↓

$$x - \sqrt{x} = (4.0 \pm 0.4) - \sqrt{4.0 \pm 0.4} = (4.0 \pm 0.4) - (2.0 \pm 5\%) = 2.0 \pm 0.5$$

$\pm 10\%$ ± 0.1

Appunto, l'errore che ci è venuto non è ingenuo, ma è un po' più grande del valore giusto 0.3. Perché? Il fatto è che le formule per somme e prodotti sono valide sotto la ipotesi che gli addendi o i fattori provengano da misure indipendenti. Nel nostro caso, la stessa x compare nei due addendi di $x - \sqrt{x}$, e questo dà luogo ad un fenomeno per cui gli errori si compensano. Se, per esempio la x è *soprastimata*, anche $\sqrt{x}$ verrà *soprastimata*, e nulla, differenza $x - \sqrt{x}$, un errore compensa l'altro. Per fortuna, le nostre formule errano, al più, dal lato

della prudenza, ossia, usate impropriamente, possono solo produrre una stima dell'incertezza maggiore di quella corretta.

Eg. (esame online del 28.v.2020, es. c)

Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, delle due semisfere, è (7.0 ± 0.2) mm, mentre la sua lunghezza è (17.0 ± 0.5) mm. Determina il volume della capsula in ml indicando l'incertezza relativa.

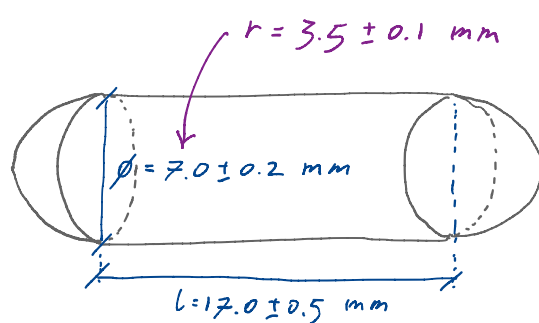
La capsula è costituita da un cilindro e due semisfere.

Chiamando L la lunghezza del cilindro e r il raggio,

che coincide, del cilindro e della sfera, abbiamo la seguente formula per il volume

$$V = \pi r^2 L + \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left(L + \frac{4}{3} r \right)$$

$\uparrow$ cilindro $\uparrow$ sfera = due semisfere



Da cui $V = 835.83 \text{ mm}^3 = 0.83583 \text{ ml}$

$$1 \text{ ml} = 10^{-3} \text{ l} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} (10^2 \text{ mm})^3 = 10^3 \text{ mm}^3$$

Per stimare l'incertezza, calcoliamo il massimo e il minimo volume dell'intervallo di incertezza,

che corrispondono a $r_{\max} = 3.6 \text{ mm}$ $l_{\max} = 17.5 \text{ mm}$ e
 $r_{\min} = 3.4 \text{ mm}$ $l_{\min} = 16.5 \text{ mm}$ rispettivamente.

$$V_{\max} = 0.30795 \text{ ml}$$

$$V_{\min} = 0.76386 \text{ ml}$$

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = 0.07204 \text{ ml}$$

↳ la seconda cifra non è nulla

L'approssimazione corretta del volume è quindi alla
seconda cifra e l'errore percentuale vale

$$\frac{0.07204}{0.83583} \cdot 100 \approx 9$$

di conseguenza $\boxed{V = 0.83 \pm 9\% \text{ ml}}$

E5 - Un foglio rettangolare è grossolanamente alto
30 cm e largo 20 cm. Con quale incertezza assolu-
ta δ devo misurare queste lunghezze se intendo
determinare l'area del foglio con una incertezza
di $\pm 1 \text{ cm}^2$?

fine l.8