

che corrispondono a $r_{\max} = 3.6 \text{ mm}$ $l_{\max} = 17.5 \text{ mm}$ e
 $r_{\min} = 3.4 \text{ mm}$ $l_{\min} = 16.5 \text{ mm}$ rispettivamente.

$$V_{\max} = 0.30795 \text{ ml}$$

$$V_{\min} = 0.26386 \text{ ml}$$

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = 0.07204 \text{ ml}$$

↳ la seconda cifra non è nulla

L'approssimazione corretta del volume è quindi alla seconda cifra e l'errore percentuale vale

$$\frac{0.07204}{0.83383} \cdot 100 \approx 9$$

di conseguenza $\boxed{V = 0.83 \pm 9\% \text{ ml}}$

E5 - Un foglio rettangolare è grossolanamente alto 30 cm e largo 20 cm . Con quale incertezza assoluta δ devo misurare queste lunghezze se intendo determinare l'area del foglio con una incertezza di $\pm 1 \text{ cm}^2$? fine l.8

La situazione descritta dall'esercizio è ragionevolmente questa. Noi abbiamo un rettangolo di cui non conosciamo le dimensioni, e, per qualche ragione, desideriamo sapere l'area di questo rettangolo. Ci accingiamo quindi a misurarlo. Vediamo dapprima rozzamente — tipo letteralmente a spanne — che il rettangolo è circa $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$: una cifra significativa di pre-

cisione. Ci chiediamo adesso con che accuratezza δ dovremo fare la misura — quella precisa — per poter determinare l'area con un'incertezza di $\pm 1 \text{ cm}^2$.

Soluzione

Calcoliamo, in maniera algebrica, in che modo l'incertezza sull'area — quella che vogliamo essere 1 cm^2 — dipenda dall'incertezza δ sulle lunghezze a, b dei due lati.

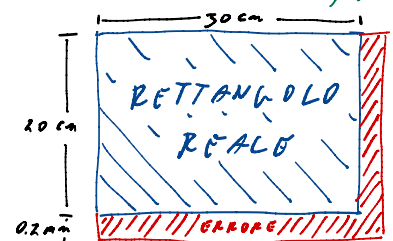
$$\begin{aligned}
 A &= (a \pm \delta) \cdot (b \pm \delta) = a \cdot b \pm \underbrace{\left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \%}_{\pm \left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \cdot \frac{a \cdot b}{100}} \\
 &\quad \pm \frac{\delta}{a} \cdot 100 \% \quad \pm \frac{\delta}{b} \cdot 100 \% \\
 &\quad \frac{\delta}{a} \cdot ab + \frac{\delta}{b} \cdot ab \\
 &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \right) \cdot ab = a \cdot b \pm (\delta b + \delta a) = a \cdot b \pm \delta \cdot (a + b)
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che l'incertezza — 1 cm^2 — deve essere $\delta \cdot (a + b)$.

$$\delta \cdot (a + b) = 1 \text{ cm}^2 \Rightarrow \delta = \frac{1 \text{ cm}^2}{\underbrace{a + b}_{20 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}} \approx \frac{1 \text{ cm}^2}{50 \text{ cm}} = \boxed{0.2 \text{ mm}}$$

Ora, i lati del rettangolo sono noti con una cifra di precisione, abbiamo quindi determinato l'incertezza richiesta con una cifra di precisione, che è proprio la precisione desiderata secondo la regola generale per le incertezze.

Nota: Se ci immaginiamo l'effetto di un errore di 0.2 mm sull'area, vediamo che può aggiungersi una strisciolina lunga 0.2 mm



e lunga $(20+30)$ cm. L'area di questa strisciolina è appunto $50 \text{ cm} \cdot 0.2 \text{ mm}$ ossia 1 cm^2 .

Il simbolo di sommatoria

La scrittura $\sum_{i=a}^b x_i$ — che si usa con a e b che sono numeri interi con $a \leq b$ — è un modo compatto di scrivere la somma $x_a + x_{a+1} + x_{a+2} + \dots + x_b$.

Esempi

$$\sum_{i=1}^4 k_i = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

i	1	2	3	4
k_i	k_1	k_2	k_3	k_4

Curiosità: $63 = \frac{3+15}{2} \cdot 7$ ossia media fra il primo e l'ultimo numero per numero dei numeri.
 occhio: questa formula non funziona sempre!

$$\sum_{i=1}^7 1+2i = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$1+2i$	3	5	7	9	11	13	15

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

i	1	2	3	4	5
i^2	1	4	9	16	25

$$\sum_{i=4}^7 i = 4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

i	4	5	6	7
i	4	5	6	7

$$\sum_{i=1}^{100} 15 = \overbrace{15 + 15 + 15 + \dots}^{100 \text{ volte}} = 15 \cdot 100 = 1500$$

i	1	2	3	...
15	15	15	15	...

Curiosità (decisamente fuori programma)

Non sempre, ma a volte si riescono a scrivere formule che permettono di calcolare certe sommatorie in maniera spedita.

Certe sono intuitive

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \left(\text{media } \frac{n+1}{2} \text{ per num. addendi } n \right)$$

Certe più misteriose

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

Certe completamente esoteriche

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Quest'ultima asserisce che, via via che si procede nel fare la somma $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$, il risultato si avvicina sempre più a $\frac{\pi^2}{6}$, e fu scoperta da Eulero nel 1734.

Determinazione delle incertezze in un esperimento

Ci sono tre tipi di errori in cui si può incorrere nel contesto di una misura strumentale.

- **Slagli** — strumento guasto, adoperato male, &c.

Come già detto questi, **non interessano** la teoria degli errori

- **Errori sistematici** — termometro che legge 2 gradi sotto la temperatura corretta, bilancia starata, e, in generale, tutti i casi in cui la quantità misurata differisce da quella reale per un certo scarto costante.

Nella teoria, assumiamo che gli errori sistematici siano già stati identificati ed eliminati, per esempio aggiungendo due gradi alla lettura di quel termometro, sottraendo la tara, &c.

Conviene, tuttavia, tenere a mente che gli errori sistematici si manifestano frequentemente.

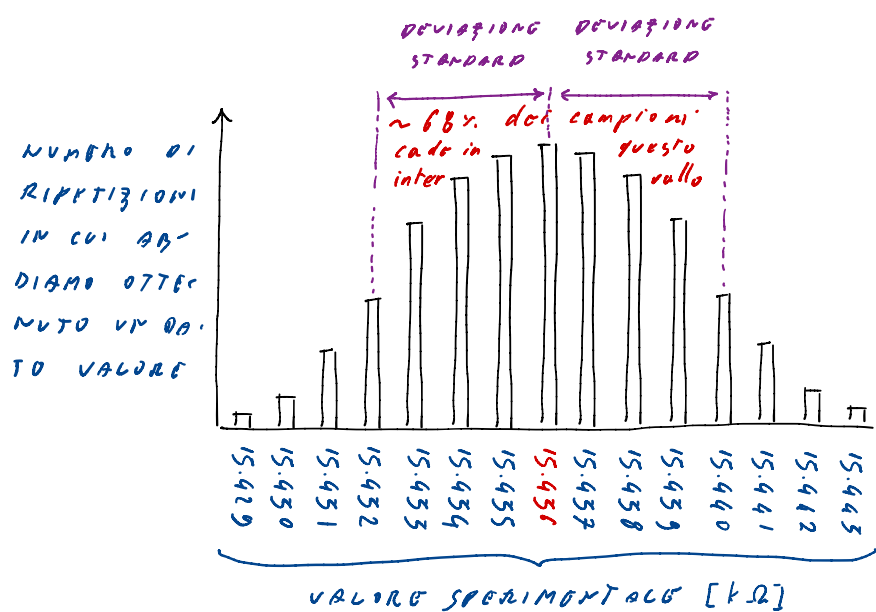
A riguardo vedere es. A compito di esame di esempio anno accademico 2018-19

- **Errori casuali inevitabili** — causati dagli attriti nei meccanismi, rumore nei circuiti elettronici, difficoltà di stimare la posizione esatta del menisco in un cilindro graduato, &c. **Questi sono l'oggetto della teoria.**

Alle volte conosciamo immediatamente l'incertezza di una misura. Per esempio, se misuriamo una distanza con un righello, o con un metro, possiamo assumere che l'incertezza assoluta di questa misura coincida con la distanza fra due tacche successive della scala (un'altra scelta ragionevole in questa situazione, sarebbe la **semidistanza**). Un altro esempio è quando usiamo uno strumento calibrato o certificato per fornire una determinata accuratezza —
occhio: il fatto che, per esempio, un amperometro **analogico** ci mostri la cifra dei mA **NON** garantisce

che la misura fatta da quello strumento sia accurata al microampere più vicino!

Avviene, tuttavia, che non ci sia modo di conoscere l'incertezza in una misura sperimentale se non per ricorso, a sua volta, all'esperimento. Vale a dire **ripetendo la misura**, e osservando la dispersione dei risultati. È un dato di fatto che, a lungo andare, i risultati ottenuti sono tanto più frequenti quanto più vicini al valore corretto (in assenza di errori sistematici). Se immaginiamo, per esempio, di misurare il valore di una resistenza elettrica di $15.436 \text{ k}\Omega$. I nostri risultati sperimentali potrebbero distribuirsi come nel grafico a



sinistra. Questo grafico dice che il valore **$15.436 \text{ k}\Omega$** è stato ottenuto più frequentemente di tutti. I valori più vicini a questo:

$15.435 \text{ k}\Omega$, $15.437 \text{ k}\Omega$

appena un po' meno frequentemente, i valori più lontani, agli estremi del diagramma, assai raramente.

L'ampiezza del picco nel grafico si chiama **deviazione standard** (σ) — ha una definizione precisa, ma ora non la trattiamo. Circa il 68% dei risultati sperimentali, poco più di $\frac{2}{3}$, cadono nell'intervallo fra valore centrale $+\sigma$ o valore centrale $-\sigma$.

Data una serie di misure $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ è ragionevole stimare che il valore reale della quantità misurata sia la loro media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Riporteremo quindi il risultato dei nostri esperimenti nella forma $x = \bar{x} \pm$ una certa incertezza δx . Questa incertezza si calcola così:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

↑
"DEVIAZIONE STANDARD DEI CAMPIONI" (è l'ampiezza del picco)

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leftarrow \begin{cases} \text{"DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA"} \\ \text{QUESTA È LA NOSTRA INCERTEZZA} \end{cases}$$

Nota: per σ_x potreste trovare sui libri una formula con il denominatore $n-1$ anziché n : è una sottigliezza, vanno bene entrambi.

Esercizio Supponiamo di misurare dieci volte la medesima lunghezza, ottenendo

42.5 mm	42.6 mm	42.2 mm
42.8 mm	42.4 mm	42.5 mm
42.2 mm	42.6 mm	42.3 mm
42.4 mm		

Che stima della lunghezza possiamo riportare?

Soluzione Detta x la lunghezza, calcoliamo $x = \bar{x} \pm \delta x$.
Innanzitutto $\bar{x}$ è la media

$$\bar{x} = \frac{42.5 \text{ mm} + 42.8 \text{ mm} + \dots}{10} = \frac{424.5 \text{ mm}}{10} = 42.45 \text{ mm}$$

Trucco la somma al numeratore può essere noiosa da calcolare, anche con una calcolatrice. Visto che i numeri sono tutti 42. qualcosa, in gran segreto, possiamo farne il conto con la sola parte frazionaria:

$$\frac{5+8+2+4+6+4+6+2+5+3}{10} = 4.5$$

Ora calcoliamo δx

$$\delta x = \sqrt{\frac{(42.5 \text{ mm} - 42.45 \text{ mm})^2 + (42.8 \text{ mm} - 42.45 \text{ mm})^2 + \dots}{10}}$$

In pratica, conviene preparare una tabella dei risultati intermedi. Ordinare i dati in ordine crescente, siccome

avvicina i risultati uguali, può aiutare

i	x_i [mm]	$x_i - \bar{x}$ [mm]	$(x_i - \bar{x})^2$ [mm ²]
1	42.2	0.25	0.0625
2	42.2	0.25	0.0625
3	42.3	0.15	0.0225
4	42.4	0.05	0.0025
5	42.4	0.05	0.0025
6	42.5	-0.05	0.0025
7	42.5	-0.05	0.0025
8	42.6	-0.15	0.0225
9	42.6	-0.15	0.0225
10	42.8	-0.35	0.1225

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = (2 \cdot 0.0625 + 3 \cdot 0.0225 + 4 \cdot 0.0025 + 0.1225) \text{ mm}^2 = 0.0325 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0.0325 \text{ mm}^2} = 0.0180 \text{ mm}$$

$$\delta x = \frac{0.0180 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 0.057 \text{ mm}$$

Seguendo la regola di arrotondare l'errore ad una cifra significativa abbiamo $x = (42.45 \pm 0.06) \text{ mm}$

Misure che sono contate

Talvolta una misura consiste nel contare

determinati eventi che si verificano casualmente in un campione per poi dedurre una stima del numero di eventi su tutta una popolazione. In questi casi consideriamo il conto come affetto da un certo errore casuale, perché campioni diversi daranno conti simili, ma diversi. La stima corretta della incertezza sul nostro conto, se abbiamo contato n_0 eventi è

$$n = n_0 \pm \sqrt{n_0}$$