

determinati eventi che si verificano casualmente in un campione per poi dedurre una stima del numero di eventi su tutta una popolazione. In questi casi consideriamo il conto come affetto da un certo errore casuale, perché campioni diversi daranno conti simili, ma diversi. La stima corretta della incertezza sul nostro conto, se abbiamo contato n_0 eventi è

$$n = n_0 \pm \sqrt{n_0}$$

fine l.9

Funzioni & grafici

Una **funzione** è una legge che associa, ad ogni elemento di un insieme detto **dominio** della funzione, un ben preciso elemento di un altro insieme detto **codominio**.

Esempio la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

dominio

codominio

nome della funzione

x generico elemento del dominio

$2+x^3$ elemento del codominio associato da f al generico elemento del dominio x

è la legge che associa ad ogni numero reale x — il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$ — il numero reale $2+x^3$ — anche il codominio è $\mathbb{R}$.

La disposizione tipografica degli elementi

[nome della funzione] : [dominio] $\longrightarrow$ [codominio]

[variabile] $\longmapsto$ [espressione associata]

è un modo formale, preciso, di descrivere una funzione, non è un'acozzaglia di simboli in ordine sparso. Se si intende specificare una funzione con questa simbologia, quindi, va fatto esattamente come indicato qua sopra.

Sposso parlarne di funzioni che hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, o un suo sottoinsieme, e come codominio ancora l'insieme $\mathbb{R}$. Quando è chiaro dal

contesto quali siano dominio e codominio, possiamo descrivere una funzione semplicemente con un'espressione come

$$f(x) = 2 + x^3 \quad "f \text{ di } x \text{ è } 2 + x^3"$$

Similmente, nota questa funzione f , possiamo voler esprimere il fatto che f associa all'elemento del dominio 3 , l'elemento del codominio 29 — ossia $2 + 3^3 = 29$.

Questo si fa con l'espressione

$$f(3) = 29 \quad "f \text{ di } 3 \text{ è } 29"$$

Nuovamente: le espressioni matematiche sono formali. Dire che f di 3 è 29 e che f di 29 è 3 non è uguale!

Nota: tuttavia alcuni specifici abusi della notazione sono comuni, e si possono commettere quando non c'è rischio di confondersi. Per esempio a volte si scrive "la funzione $f(x)$ " e sarebbe corretto "la funzione f "

$$\sin 30^\circ$$

"

$$\sin(30^\circ)$$

$$\cos^2 7$$

$$(\cos(7))^2$$

Nel dubbio, conviene utilizzare la forma pedante.

Una funzione non deve necessariamente possedere una espressione di natura algebrica. Per esempio, i valori assunti da una funzione (quindi la funzione stessa) potrebbero essere determinati sperimentalmente, o stabiliti

per convenzione, e dati in forma grafica o tabulare.

Esempi:

- la funzione che associa un punto della Terra alla sua quota sul livello del mare — definita sperimentalmente
- la funzione che associa ad ogni data il giorno della settimana corrispondente — definita per convenzione
- sarebbe **SBARGLIATO** parlare della funzione che associa ad x il numero y tale che $y^2 = x$. — infatti questo numero non è determinato univocamente: a 4 si potrebbe associare sia 2 sia -2.

Rappresentazioni di Funzioni

Il modo più immediato di rappresentare una funzione f è forse una tabella che elenca, per ogni valore di x ritenuto interessante, il corrispondente valore di $f(x)$.

Eg La funzione $f(x) = 1 + x^2$ può dar luogo alla tabella

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	100
$f(x)$	2	1.25	1	1.25	2	5	101

Per quanto semplice, questa rappresentazione non determina f univocamente: come fare se il valore di x che ci interessa non è fra quelli tabulati?

Vedremo come ovviare, in parte, a questo inconveniente.

niente quando parleremo di interpolazione lineare.

Esercizio data la tabella

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1.5	4	7.5	12

e sapendo che la funzione f è della forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

determina l'espressione di f .

Soluzione dobbiamo determinare le tre costanti a, b, c ci aspettiamo, quindi, di dover sfruttare tre condizioni. Possiamo provare con:

valori letti dalla tabella

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = f(0) = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = f(2) = 4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = f(4) = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 4 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 12 \end{cases}$$

uguaglianze vere per via della forma di f

Risolviendo il sistema otteniamo $a = \frac{1}{2}$ $b = 1$ $c = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

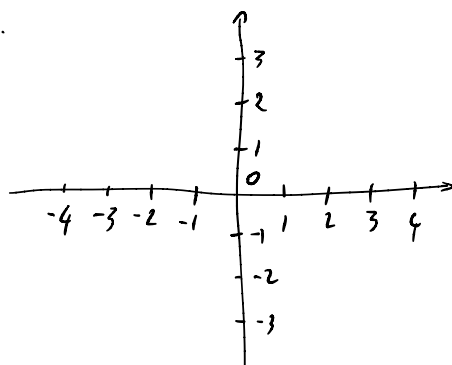
È ora importante verificare questo risultato ricostruendo la tabella dei valori di f a partire dalla formula che abbiamo trovato. Una discrepanza indicherebbe

la possibilità di un errore di calcolo.

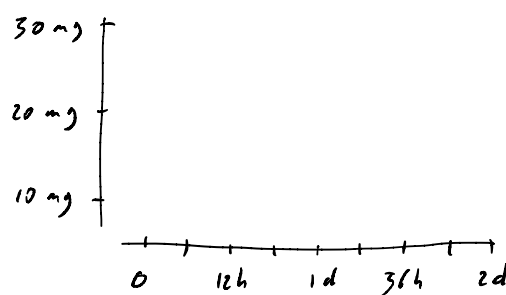
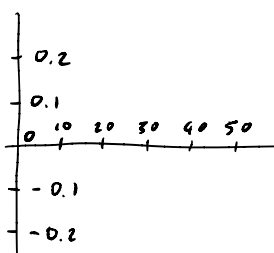
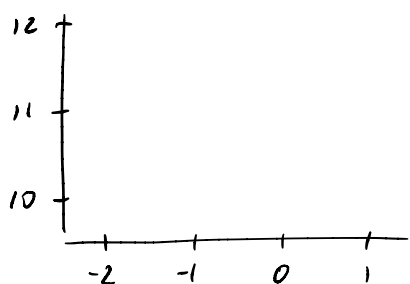
Nota: abbiamo scelto di scrivere le tre condizioni necessarie per trovare i coefficienti usando i valori tabulati per f in 0, 2, 4. Matematicamente, astrattamente, qualunque terna di valori sarebbe stata adatta allo scopo (per esempio 0, 1, 2). Tuttavia, in pratica, è buona norma usare valori più distanti possibile fra loro, per minimizzare l'impatto degli errori di arrotondamento e delle eventuali incertezze di misura nei dati tabulati.

Grafici

Considerando due assi ortogonali e graduati secondo la distanza da un certo punto fissato, si ottiene, come è ben noto, un diagramma cartesiano.



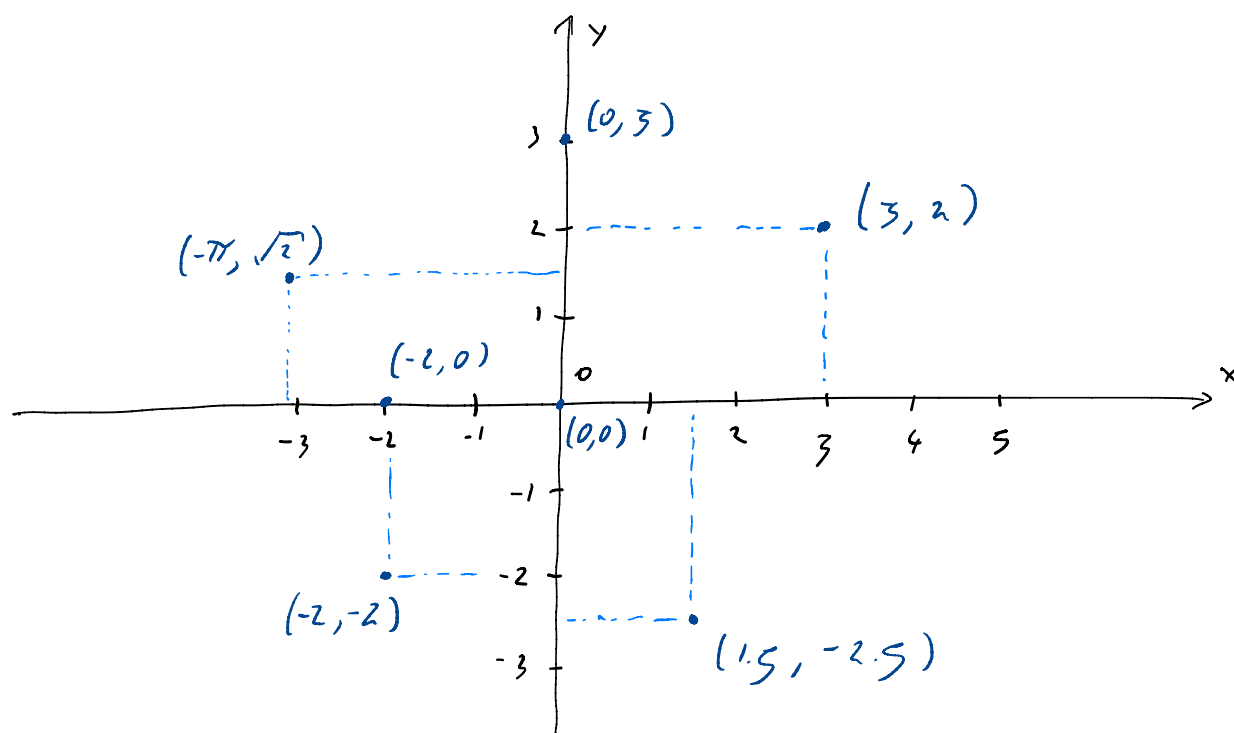
Nota: nulla obbliga lo zero a trovarsi nel punto di incontro degli assi, né gli assi ad essere graduati nella medesima unità.



Alcuni diagrammi cartesiani

Un asse è tipicamente rappresentato orizzontalmente e detto *asse delle ascisse* , l'altro disposto verticalmente, si chiama *asse delle ordinate* .

Un diagramma cartesiano ci permette di assegnare ad ogni punto del piano un nome, che è la coppia di valori che si leggono in corrispondenza delle proiezioni del punto rispettivamente *in quest'ordine!* sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



Viceversa, ogni coppia di valori è rappresentata da un punto del diagramma.

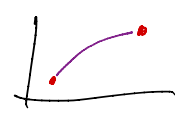
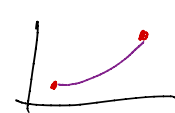
Il grafico di una funzione f è costituito da tutti i punti del tipo $(x, f(x))$

Se fosse possibile disegnare tutti, gli infiniti punti $(x, f(x))$

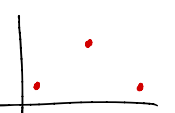
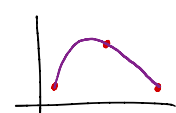
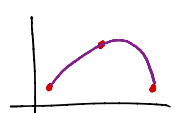
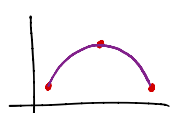
il loro insieme formerebbe, solitamente, una linea, che è il grafico di f . In pratica, ci si deve limitare al calcolo di una quantità finita di punti, che poi si congiungono tracciando una linea che, ragionevolmente, dovrebbe seguire il vero grafico (teorico).

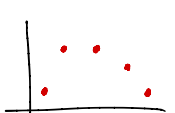
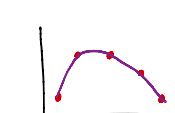
Come si disegna un grafico in pratica?

- ① Calcolo il valore della funzione in alcuni (pochi) punti per capire come impostare gli assi
- ② Traccio gli assi e riporto i punti calcolati
- ③ Aggiungo punti in quelle zone dove l'andamento del grafico non mi è chiaro.

Es.  sarà  o  ?

Aggiungo un punto , quindi è così  !

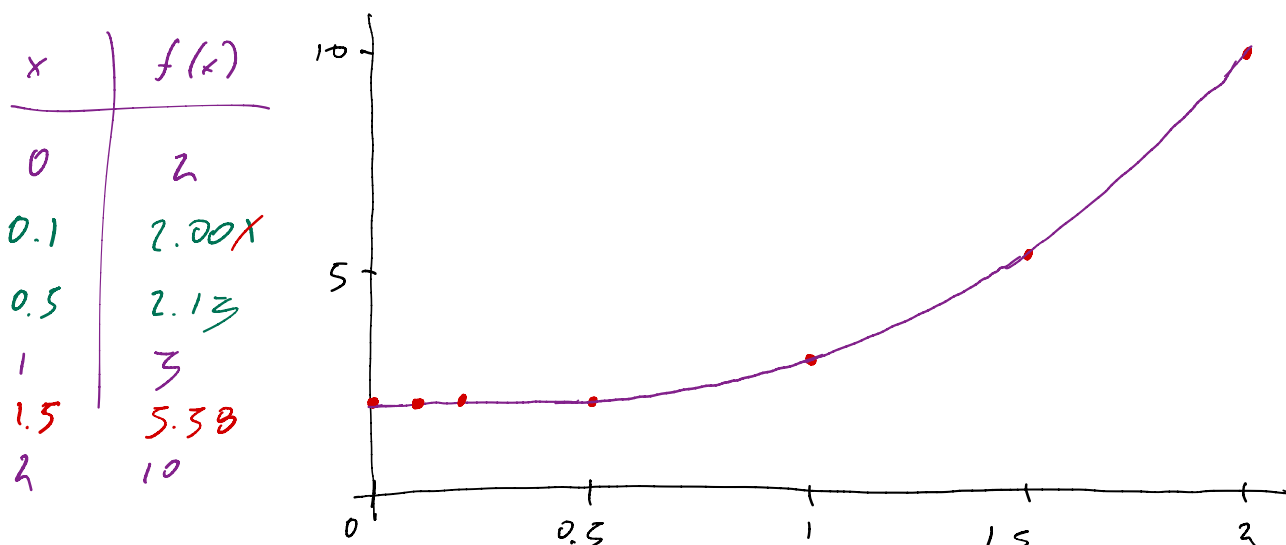
Es.  è  o  oppure  ?

Aggiungo due punti , quindi  !

Esercizio

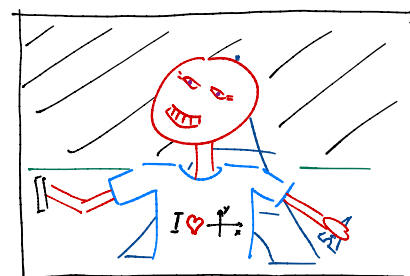
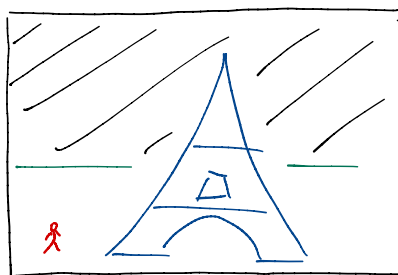
Tracciare il grafico di $x \mapsto 2+x^3$.

per x compreso fra 0 e 2.



Nota Nel tracciare il diagramma di una funzione è importante prestare attenzione alla scelta della scala e alla centratura.

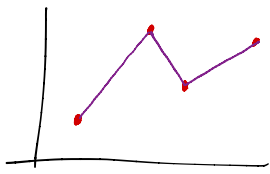
Se un turista ti chiede una foto, la vuole come quella di destra.



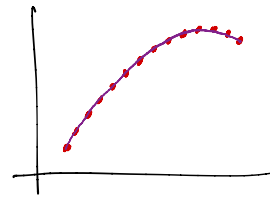
Anche le funzioni preferiscono essere in primo piano (e hanno, bene o male, tanto buon gusto quanto il grosso dei turisti). In maniera più seria, un grafico è un mezzo per comunicare informazione. È fondamentale far uso di tutto lo spazio disponibile in maniera informativa.

Siccome lo spazio vuoto non comunica informazione, è bene che i grafici occupino tutto lo spazio disponibile.

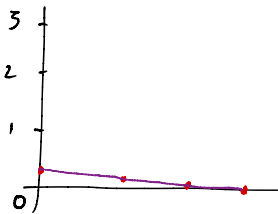
Come **NON** tracciare un grafico



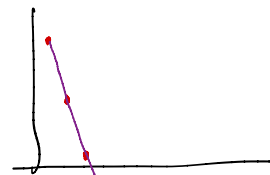
Spezzata (salvo se la funzione è davvero una spezzata)



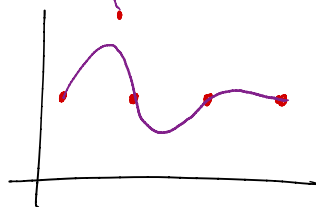
Calcolare 2000 punti non è sbagliato, ma spreca tempo



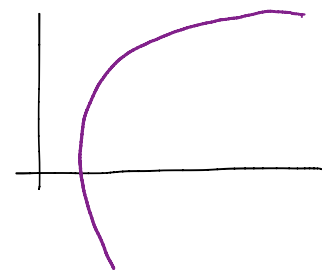
Scala sbagliata, più conveniente usare unità diverse sui due assi



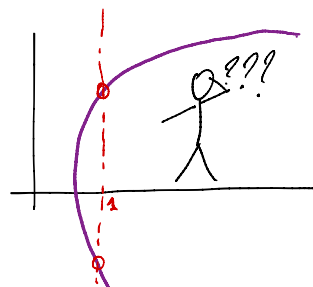
Centrata sbagliata, non tutti i numeri sono positivi.



Comportamento non evidenziato dai punti calcolati.



Uncino, quanto vale $f(1)$?



Esercizio: traccia i grafici delle funzioni seguenti

$$f_1(x) = x - 0.01 \cdot x^3 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 15$$

$$f_2(x) = x - 2 \cos(x) \quad \text{IN RADIANTI!} \quad , \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$f_3(x) = x^3 - 50 \cdot x \quad " \quad 9.8 \leq x \leq 10.2$$

$$f_4(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1} \quad " \quad -3 \leq x \leq 3$$

$$f_5(x) = \cos(x) \quad " \quad -0.1 \leq x \leq 0.1$$

$$f_6(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad " \quad -0.1 \leq x \leq 0.1$$

$$f_7(x) = x - \sin(x) \quad " \quad -0.1 \leq x \leq 0.1$$

Soluzioni alla lezione 11.