

Esercizio: traccia i grafici delle funzioni seguenti

(1) $f_1(x) = x - 0.01 \cdot x^3$ per $0 \leq x \leq 15$

(2) $f_2(x) = x - 2 \overset{\text{IN RADIANTI!}}{\cos}(x)$ " $0 \leq x \leq 5$

(3) $f_3(x) = x^3 - 50 \cdot x$ " $9.8 \leq x \leq 10.2$

(4) $f_4(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$ " $-3 \leq x \leq 3$

(5) $f_5(x) = \cos(x)$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$

(6) $f_6(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$

(7) $f_7(x) = x - \sin(x)$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$

fino 1.10

Soluzioni: (Nota: non tutte le soluzioni sono state illustrate a lezione. Qui aggiungo, per completezza, quelle mancanti)

① $f_1(x) = x - 0.01 \cdot x^3$ per $0 \leq x \leq 15$

1) Comincio col calcolare

$$f_1(0) = 0 \quad f_1(5) = 3.75 \quad f_1(10) = 0 \quad f_1(15) = -18.75$$

2) Imposto il grafico e riporto i punti.

3) Desidero indagare meglio l'andamento di f_1

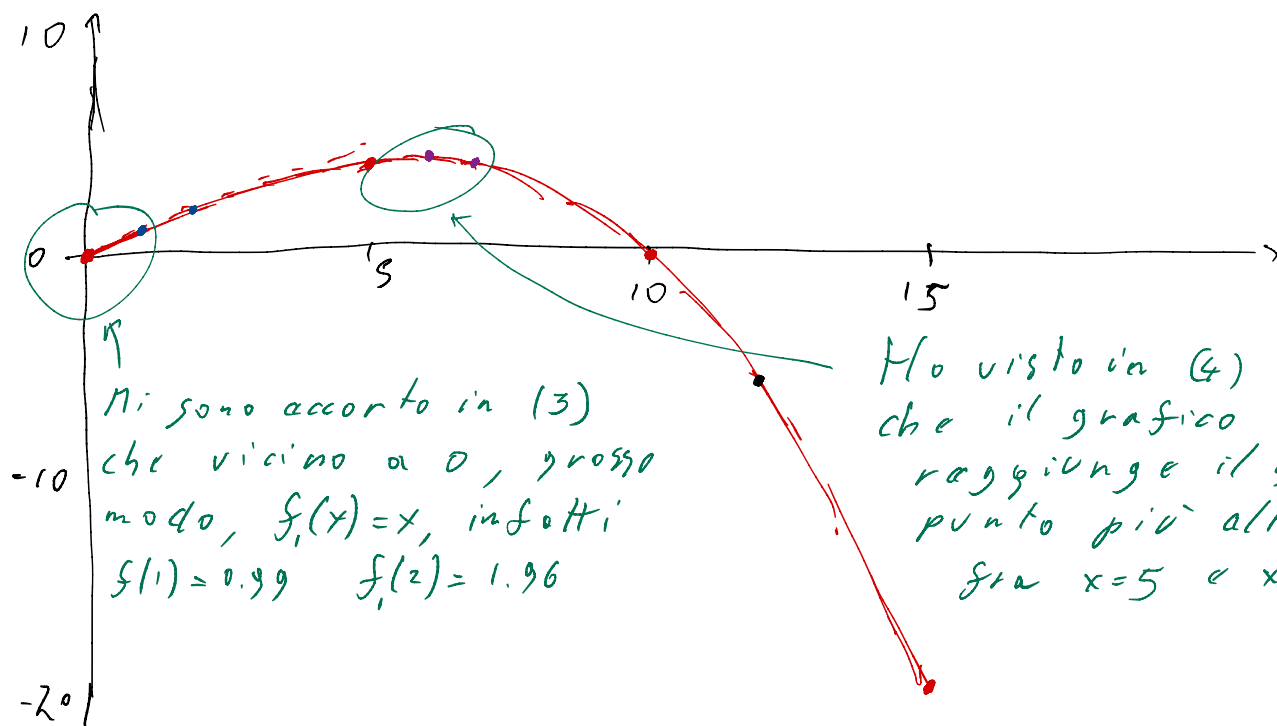
vicino a 0: $f_1(1) = 0.99$, $f_1(2) = 1.96$

4) f_1 tocca il massimo valore prima o dopo 5?

$$f_1(6) = 3.84, \quad f_1(7) = 3.56 \rightarrow \text{probabilmente tra } 5 \text{ e } 7 \text{ perché } f_1(6) > f_1(5), f_1(7).$$

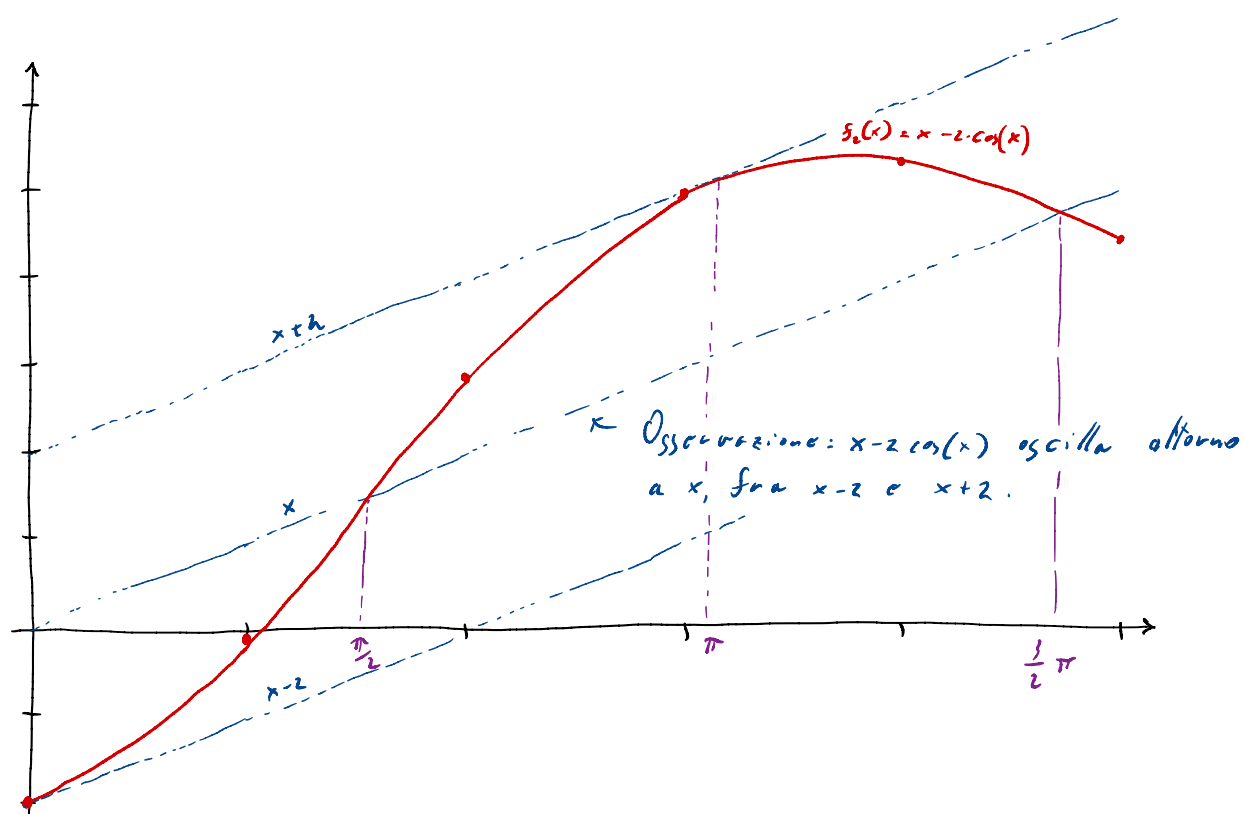
5) Per capire meglio il comportamento

tra 10 e 15 calcolo $f_1(12) = -5.28$.

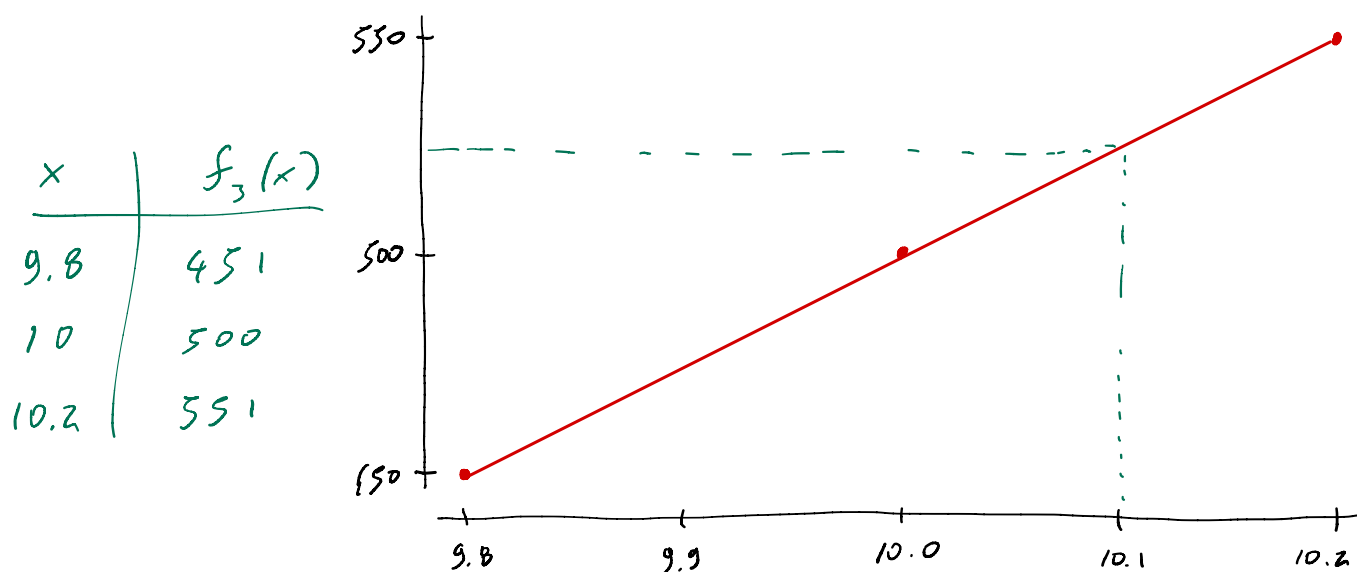


Mi sono accorto in (3) che vicino a 0, grosso modo, $f_1(x) = x$, infatti $f_1(1) = 0.99$ $f_1(2) = 1.96$

① $f_2(x) = x - 2 \overset{\text{IN RADIANTI!}}{\cos(x)}$ per $0 \leq x \leq \pi$

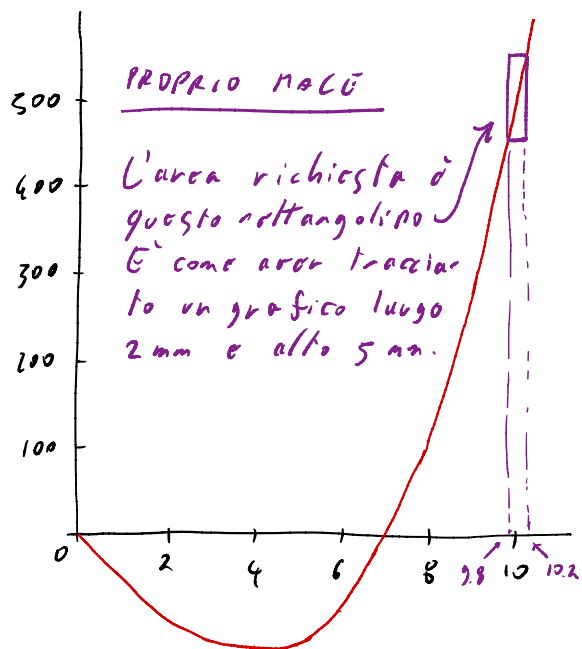
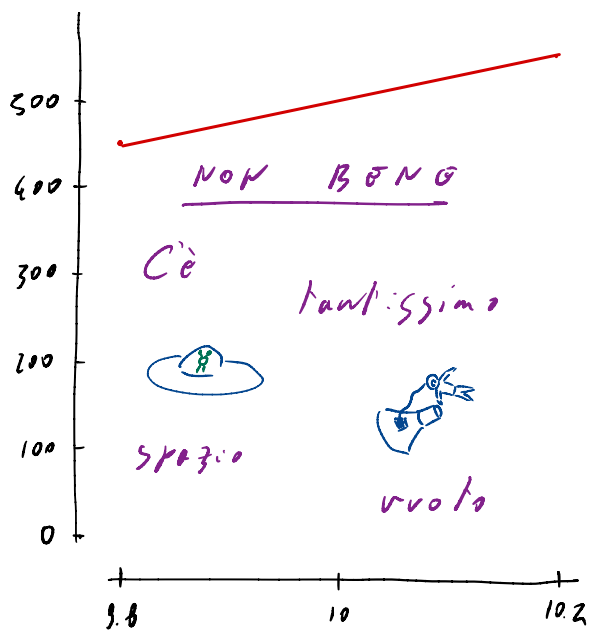


③ $f_3(x) = x^3 - 50 \cdot x$ per $9.8 \leq x \leq 10.2$

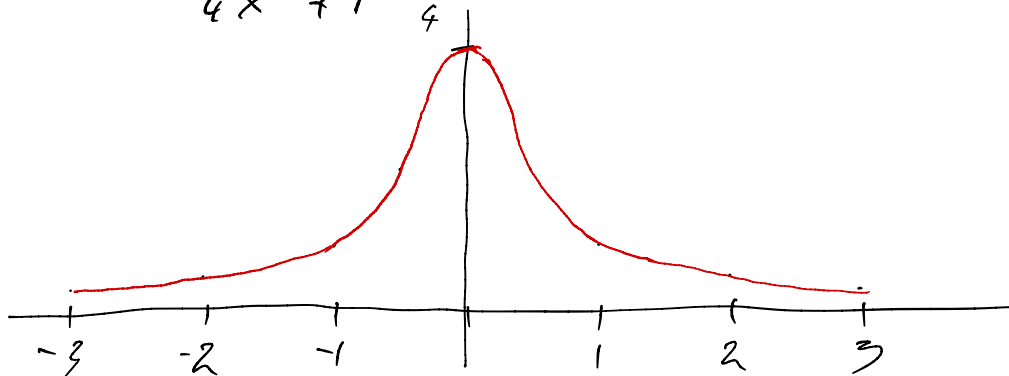


Osservazione: sebbene $f_3(x) = x^3 - 50x$ non sia esattamente l'equazione di una retta, in pratica, questo grafico appare quasi rettilineo.

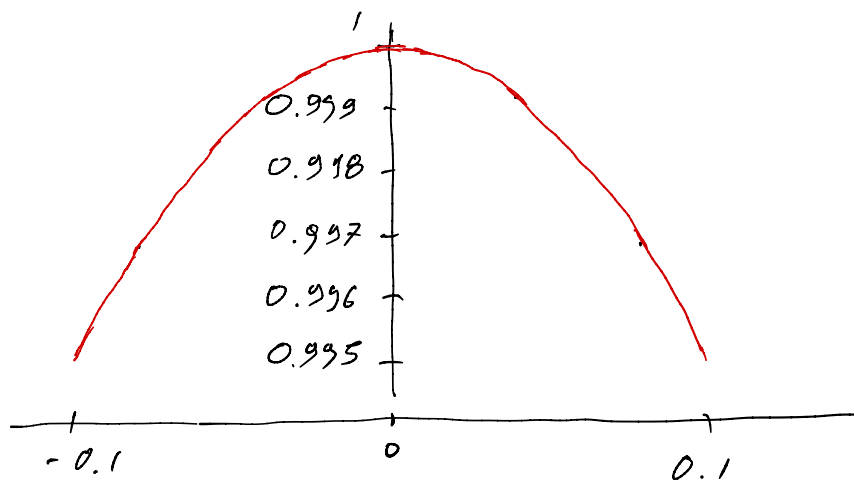
Modi per sbagliare questo esercizio:



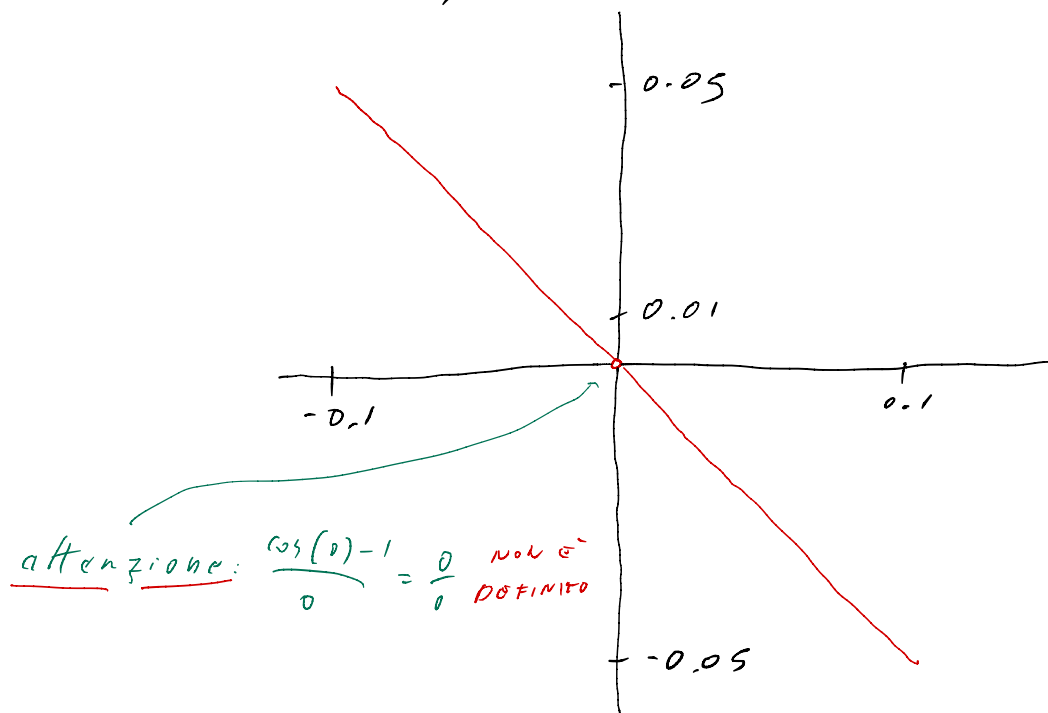
④ $f_4(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$ per $-3 \leq x \leq 3$



⑤ $f_5(x) = \cos(x)$ per $-0.1 \leq x \leq 0.1$



$$(6) \quad f_6(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{per } -0.1 \leq x \leq 0.1$$



$$(7) \quad f_7(x) = x - \sin(x) \quad \text{per } -0.1 \leq x \leq 0.1$$

(1) Comincio con

$$f_7(-0.1) = -1.67 \cdot 10^{-4} \quad f_7(0) = 0 \quad f_7(0.1) = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

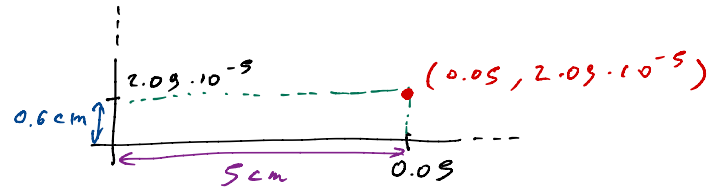
(2) Imposto il grafico. Attenzione: mi sono venuti numeri molto piccoli. Dovrò usare una scala opportuna per le ordinate, tipo 3cm corrispondono a 10^{-4} .

Nota: I valori si riportano mediante la proporzione con determinate unità di misura. Per esempio, se decido che, in ascissa 10cm corrispondono a 0.1, mentre in ordinata 3cm corrispondono a 10^{-4} , come

riporto il punto $(0.05, 2.09 \cdot 10^{-5})$?

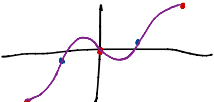
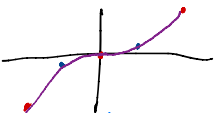
$10 \text{ cm} : 0.1 = x : 0.05 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$ $\leftarrow f(0.05)$

$3 \text{ cm} : 10^{-4} = y : 2.09 \cdot 10^{-5} \rightarrow y = 0.627 \text{ cm} \approx 0.6 \text{ cm}$

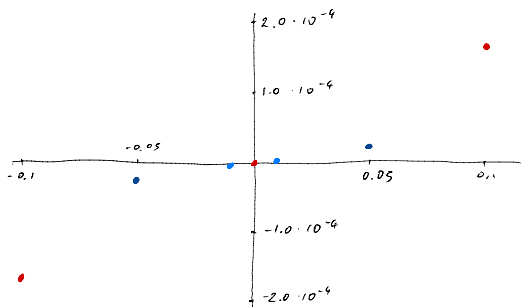


(3) Per ora ho un grafico così  ma dubito che sia rettilineo. Per controllare calcolo $f_z(0.05) = 2.09 \cdot 10^{-5}$ $f_z(-0.05) = -2.09 \cdot 10^{-5}$

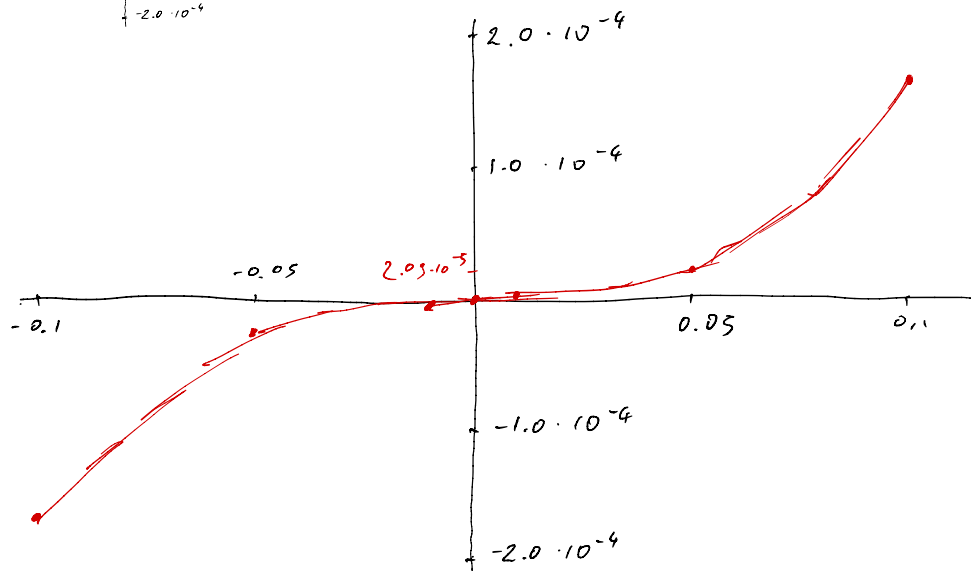
(4) Ora ho questa situazione , mi devo aspettare un grafico come questo

 oppure come questo  ?

Calcolo $f_z(0.01) = 1.67 \cdot 10^{-7}$ $f_z(-0.01) = -1.67 \cdot 10^{-7}$



I punti sono come in figura, quindi mi trovo nella seconda situazione.



Conviene studiare il comportamento di alcune funzioni, o classi di funzioni, che si incontrano frequentemente. Ci concentreremo su:

- funzioni polinomiali
- esponenziali
- logaritmi
- funzioni trigonometriche ($\sin$, $\cos$, $\tan$)
- funzioni trigonometriche inverse ($\arcsin$, $\arccos$, ...)

Funzioni polinomiali

Si chiamano così le funzioni della forma

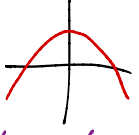
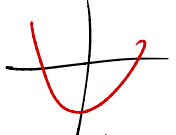
$$f(x) = a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

monomi

il numero intero d , il massimo esponente della x nell'espressione di f — intendendo $a_d \neq 0$ — si chiama grado del polinomio.

In generale, una funzione polinomiale, diciamo di grado $d > 0$, è definita su tutti i numeri reali. Dal suo grafico possiamo dire che:

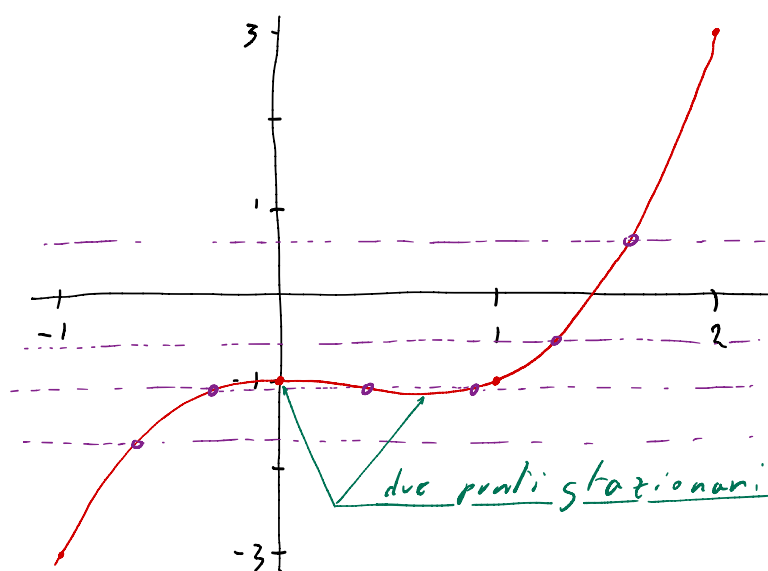
- È una curva regolare (ossia è continua, cioè senza salti , e liscia, cioè senza angoli  e senza cuspidi ).

- Ha al massimo $d-1$ gobbe:  oppure 
Formalmente dovremmo dire che ha al massimo $d-1$ "punti stazionari": studieremo questo concetto quando tratteremo la derivata.
- Incontra una qualunque retta orizzontale — per esempio l'asse x — al massimo d volte.

Esempio Studiamo il grafico di:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

(polinomio di grado 3) per $-1 \leq x \leq 2$.



Come previsto ci sono al massimo — in questo caso esattamente — $3-1$ punti stazionari.

Inoltre il grafico non interseca alcuna retta orizzontale in più di 3 punti.

Questo esempio ci permette di illustrare una osservazione importante:

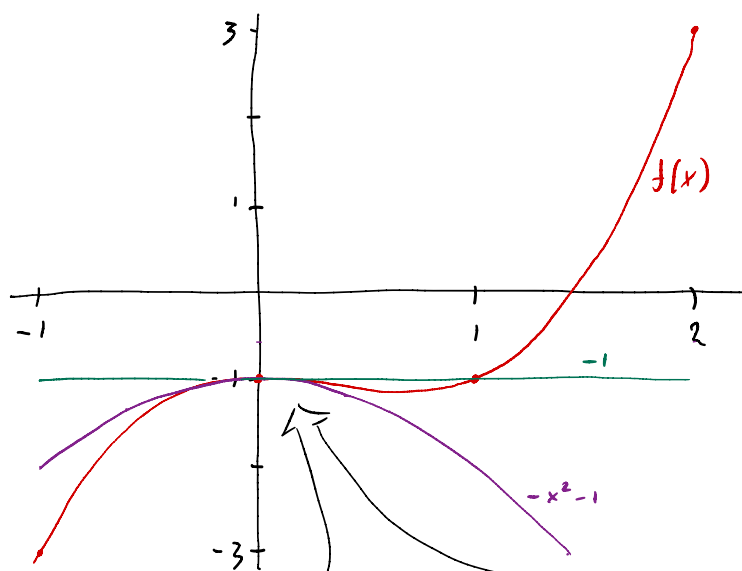
- Per valori di $|x|$ piccoli — rozzamente potremmo dire di un ordine di grandezza inferiore rispetto ai coefficienti del polinomio — dominano i monomi di grado

minore. Ossia, è possibile approssimare la funzione trascurando i monomi di grado più alto: va da sé che meno monomi si trascurano, migliore è l'approssimazione.

- Per valori di $|x|$ grandi — rozzamente, di un ordine di grandezza superiore rispetto ai coefficienti — al contrario, dominano i monomi di grado maggiore.

Ossia possiamo approssimare la funzione trascurando i monomi di grado più basso.

Nel nostro esempio



Vicino a 0 il grafico rosso è simile a quello viola.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

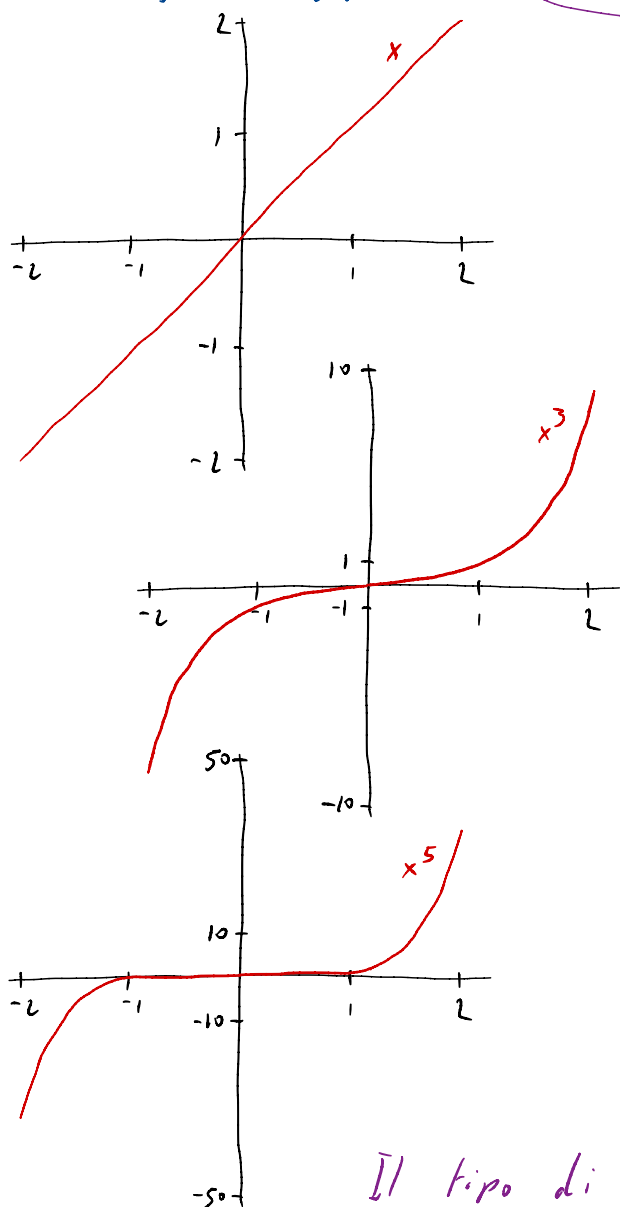
Trascurando il monomio x^3 , otteniamo $-x^2 - 1$ che approssima bene $f(x)$ per x vicino a 0. Se trascuriamo anche $-x^2$ ci rimane la costante -1 , che, vicino a 0, è la costante che meglio approssima f .

Se tracciassimo, invece, il grafico di f in un intervallo più vasto dello x — per esempio fra -100 e 100 — (esercizio) in modo tale evidenziare il comportamento

per $|x|$ grande, vedremmo che questo grafico è vicino a quello di x^3 , che è il monomio di grado massimo nell'espressione di f .

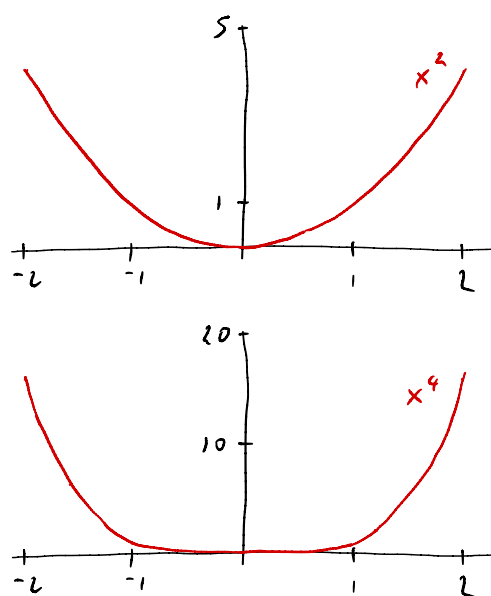
Per sfruttare al meglio la possibilità di approssimare un polinomio — in certe circostanze — con altri più semplici, conviene ricordare l'aspetto dei grafici dei polinomi più semplici di tutti, ossia le potenze di x .

Potenze dispari



Occhio alla scala sull'asse y !

Potenze pari

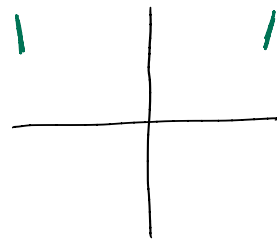


Il tipo di simmetria di questi grafici si chiama "simmetria pari".

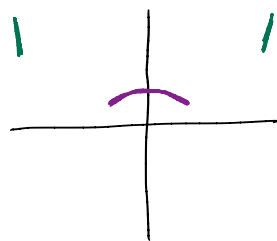
Il tipo di questi altri "simmetria dispari".

Esempio: studiamo la funzione $f(x) = x^4 - x^2 + 0.1$

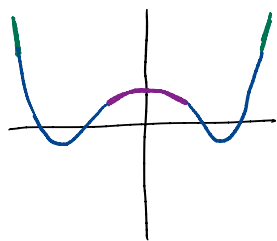
I principi generali ci dicono che, per $|x|$ grande, ossia lontano dallo zero, questo grafico assomiglia a quello di x^4



Inoltre, per $|x|$ piccolo, il grafico assomiglia a $-x^2 + 0.1$, che sappiamo per esperienza essere una parabola rivolta verso il basso.



Infine, il grafico di f ha al massimo tre gobbe, e c'è essenzialmente un solo modo di connettere i tratti che abbiamo rispettando questa condizione.



Queste considerazioni ci hanno permesso di capire, qualitativamente — ossia trascurando, e possibilmente anche distorcendo, la scala degli assi — la forma che avrà il nostro grafico. Se ora ci accingiamo a tracciare un grafico quantitativamente corretto — ossia un grafico fatto a modo — possiamo usare l'informazione guadagnata in questo modo come guida.

Esercizio tracciare questo grafico per x compreso fra -1.1 e 1.1 .

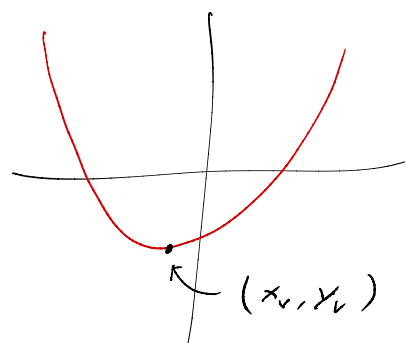
Funzioni quadratiche (parabole)

Le funzioni quadratiche sono particolari funzioni polinomiali della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

Il grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola con asse verticale, concava verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$. A riguardo, può servire ricordarsi queste formule.

Ascissa del vertice $x_v = \frac{-b}{2a}$

(Si ricava come punto medio delle intersezioni della parabola con l'asse x : $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)



Ordinata del vertice — basta usando x_v : $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$

Volendo si può ricordare la formula $y_v = c - \frac{b^2}{4a}$ però è più facile e sicuro ricavare y_v da x_v .

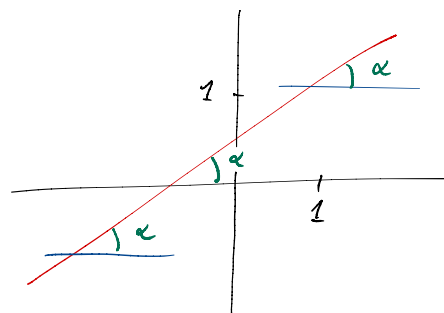
Funzioni lineari (rette)

Le funzioni lineari sono particolari funzioni polinomiali della forma $f(x) = ax + b$.

Il grafico di $f(x) = ax + b$ è una retta, il numero a si chiama coefficiente angolare della retta. Se le unità sui due assi coincidono, allora l'angolo α di

inclinazione della retta vale

$$\alpha = \arctan(a)$$



Osservazione: due rette che abbiano lo stesso coefficiente angolare sono parallele.

Retta per due punti

Es. Trovare l'equazione $f(x) = ax + b$ di una retta passante per $(-1, 4)$ e $(1, 0)$.

Sol.

Per dato del problema: $f(-1) = 4$
 $f(1) = 0$

Quindi

$$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = 4 \\ a \cdot (1) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 2 \\ a = -2 \end{matrix}$$

Di conseguenza $\boxed{f(x) = -2x + 2}$

Consiglio trovata una soluzione,

la verifico

$$f(-1) = (-2) \cdot (-1) + 2 = 4 \quad \checkmark$$

$$f(1) = (-2) \cdot 1 + 2 = 0 \quad \checkmark$$

fine !!

