

Funzioni esponenziali

Sappiamo che $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$

e ugualmente $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ volte}}$

questo è l'ordinario elevamento a potenza. È possibile estendere l'elevamento a potenza in modo tale da ammettere esponenti reali arbitrari (anche frazionari, o persino irrazionali). Il risultato è l'esponenziale b^a , definito per ogni esponente a e per basi b positive. Valgono le seguenti proprietà.

$$b^0 = 1 \quad b^x \cdot b^y = b^{x+y} \quad x^a \cdot y^a = (xy)^a \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

$$b^1 = b \quad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \quad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \quad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$
$$1^a = 1$$

Nota: la costruzione formale della funzione esponenziale richiede nozioni di analisi ed è al di fuori della portata di questo corso. È possibile, tuttavia, giustificare le proprietà dell'esponenziale pensando al caso più semplice dell'elevamento a potenza. Per esempio:

$$b^x \cdot b^y = \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{x \text{ volte}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{y \text{ volte}} = \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{x+y \text{ volte}} = b^{x+y}$$

Esercizio Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x ?

Analizziamo prima la quantità cercata

$$100^x = (10^2)^x = 10^{2 \cdot x} = 10^{x \cdot 2} = (10^x)^2$$

$\underbrace{(10^2)^x = 10^{2 \cdot x}}_{(b^a)^c = b^{a \cdot c}} \quad \underbrace{10^{x \cdot 2} = (10^x)^2}_{b^{a \cdot c} = (b^a)^c}$

Ci basta quindi capire quanto valga 10^x . Ripetendo il procedimento su 10^{3x} vediamo che

$$64 = 10^{3x} = 10^{x \cdot 3} = (10^x)^3 \Rightarrow 10^x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Quindi, sostituendo

$$100^x = \dots = (10^x)^2 = 4^2 = \boxed{16}$$

Esercizio Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x ?

Procedendo come nell'esercizio precedente

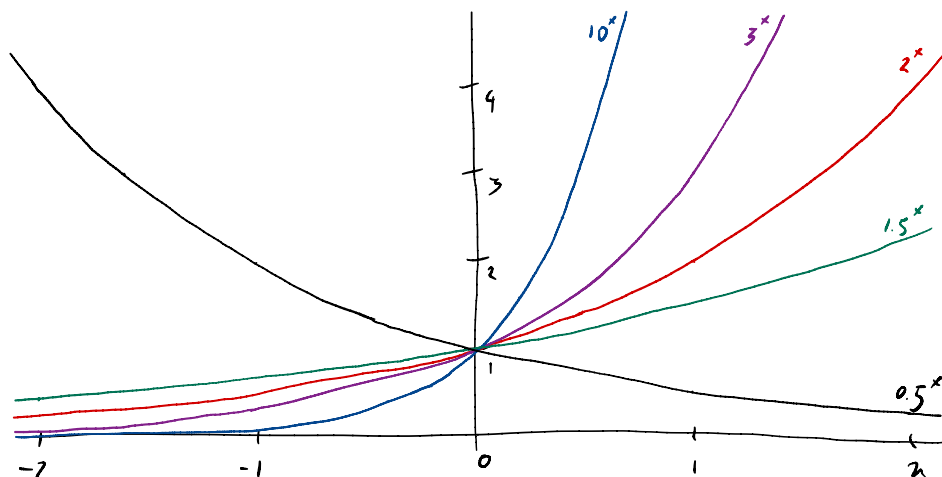
$$2.7 \cdot 10^4 = 8^x = (2^3)^x = (2^x)^3 \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$$

Regla da calcolare $\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$

$$\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^3} = (27 \cdot 10^3)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \boxed{30}$$

$\underbrace{\sqrt[3]{27} = 3}_{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \quad \underbrace{10^1 = 10}_{(b^a)^c = b^{a \cdot c}}$

Grafico dell'esponenziale (esempi)



Osservando questi grafici possiamo notare alcune proprietà delle funzioni esponenziali.

- Se $b > 1$ la funzione b^x è crescente, ossia assume valori via via più grandi al crescere di x .
- Se $0 < b < 1$ la funzione b^x è decrescente, ossia assume valori via via più piccoli al crescere di x .

Algebricamente questo significa che

• per $b > 1$ $b^x > b^y$ equivale a $x > y$

• per $0 < b < 1$ $b^x > b^y$ equivale a $x < y$

Esercizio (domanda di preparazione al test - n. 42)

Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Dividendo ambo i membri per la quantità positiva 2^x

$$\underbrace{\frac{2^x}{2^x}}_{=1} < \underbrace{\frac{5^x}{2^x}}_{=\left(\frac{5}{2}\right)^x} \Leftrightarrow \underbrace{1}_{\left(\frac{5}{2}\right)^0} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^x}_{\text{Poiché } \frac{5}{2} > 1} \Leftrightarrow \boxed{0 < x}$$

Possiamo vedere, inoltre, che b^x cresce tanto più velocemente, al crescere di x , quanto maggiore è la base b .

Infine, va da sé che tutti i grafici di b^x devono passare per il punto $(0, 1)$, perché $b^0 = 1$ indipendentemente da b .

Alcuni valori della funzione 10^x

Tutti sanno calcolare 10^x quando x è un numero intero:

$$10^2 = 100$$

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$10^{-3} = 0.001 \quad \&c.$$

è una semplice questione di contare gli zeri. Diverso è quando x non è intero: per esempio quanto vale $10^{3.7}$?

Un primo passo è scrivere $10^{3.7} = 10^3 \cdot 10^{0.7} = 1000 \cdot 10^{0.7}$, però adesso occorre sapere quanto valga $10^{0.7}$.

Per esercizio, calcoliamo valori approssimati per $10^{0.1}$, $10^{0.2}$, etc. fino a $10^{0.9}$. Sfrutteremo il fatto seguente, che conviene ricordare

$$10^{0.3} \approx 2 \quad (\text{valore esatto } 1.99526\dots)$$

Iniziamo quindi con questa tabella

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2							10

Usando la relazione $10^{x+0.3} = 10^x \cdot 10^{0.3} \approx 10^x \cdot 2$ calcoliamo

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2			4			8	10

Diagramma di annotazione: frecce rosse sopra la tabella indicano l'aggiunta di 0.3 (da 0.3 a 0.6, da 0.6 a 0.9) e moltiplicazione per 2. Frecce rosse sotto la tabella indicano la sottrazione di 0.3 (da 0.6 a 0.3, da 0.9 a 0.6) e divisione per 2.

Viceversa, usando $10^{x-0.3} = 10^x \cdot 10^{-0.3} = 10^x / 10^{0.3} \approx 10^x / 2$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25		2	2.5		4	5		8	10

Diagramma di annotazione: frecce rosse sopra la tabella indicano la sottrazione di 0.3 (da 0.1 a 0, da 0.4 a 0.3, da 0.7 a 0.6, da 0.9 a 0.8) e divisione per 2. Frecce rosse sotto la tabella indicano l'aggiunta di 0.3 (da 0.1 a 0.4, da 0.4 a 0.7, da 0.8 a 0.9) e moltiplicazione per 2.

Ora ci mancano gli esponenti 0.2, 0.5, 0.8, che sono a passi di 0.3 l'uno dall'altro. Ci basta quindi determinarne uno per poter completare la tabella. Per esempio possiamo considerare

$$10^{0.2} = 10^{0.3 - 0.1} = \frac{10^{0.3}}{10^{0.1}} \approx \frac{2}{1.25} = 1.6$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10

+0.3
+0.3

.2
.2

Per curiosità, possiamo confrontare la nostra tabella con i valori esatti:

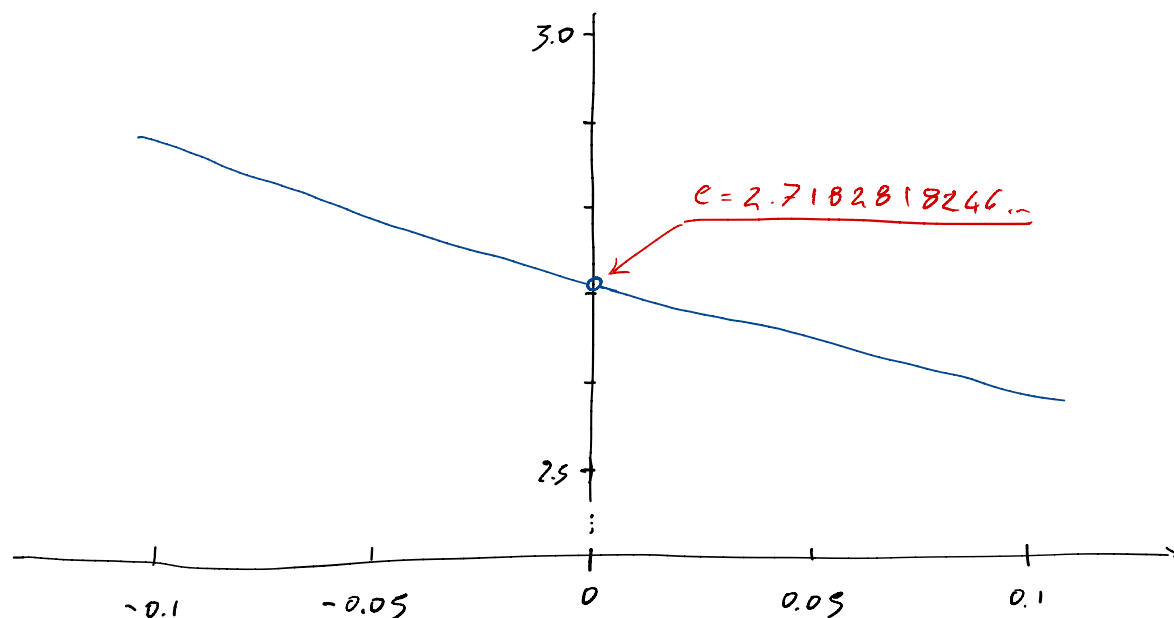
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$10^x \approx$	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10
$=$	1.00	1.26	1.58	2.00	2.51	3.16	3.98	5.01	6.31	7.94	10.00
err %	0%	-0.7%	+1.0%	+0.2%	-0.5%	+1.2%	+0.5%	-0.2%	+1.4%	+0.7%	0%

Abbiamo commesso il massimo errore per $10^{0.8}$, e questo è del 1.4% rispetto al valore esatto.

Intermezzo: il numero e

Introduciamo il numero $e = 2.71828182846\dots$, che spesso viene usato come base dei logaritmi — che vedremo al prossimo paragrafo — e degli esponenziali — cioè e^x .

Il numero e — "numero di Eulero", anche "numero di Napero", che sono due persone diverse, ma poco importa perché comunque lo ha scoperto Jacob Bernoulli; — emerge dallo studio della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$



Chiaramente $f(0)$ non è definito, perché occorrerebbe calcolare l'esponente $\frac{1}{0}$, tuttavia, tracciando un grafico accurato di $f(x)$ in prossimità di $x=0$, si vede che questo ha l'aspetto di una curva regolare cui manca il punto di ascissa 0. Il numero e è definito esattamente come l'ordinata di questo punto mancante. Vedremo a suo tempo che l'espressione formale per riferirsi a questo concetto è che " e è il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x tendente a 0", e si scrive $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Il numero e è quindi una costante matematica nello stesso senso in cui lo è π : un numero fissato non

per convenzione — come le 24 ore in un giorno —
 né dall'osservazione di un fenomeno naturale — come
 i 365.24 giorni in un anno — ma da una proprietà
 matematica — la lunghezza della circonferenza per π ,
 e il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per e .

In pratica, tutte le calcolatrici scientifiche hanno un tasto
 per la funzione e^x , i linguaggi di programmazione hanno
 una funzione di libreria che calcola e^x , etc. Quindi non
 c'è alcun bisogno di calcolare e . Se volessimo, però,
 potremmo calcolare $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x decrescenti in valore
 assoluto:

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.594
0.01	2.705
0.001	2.717
0.0001	<u>2.718</u>

POSITIVI

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.868
-0.01	2.732
-0.001	2.720
-0.0001	<u>2.718</u>

NEGATIVI

Quello che otteniamo sono approssimazioni per difetto e per
 eccesso — secondo che x sia rispettivamente positivo o
 negativo — del numero e .

Approfondimento (fuori programma)

Una delle ragioni per definire il numero e è che l'esponen-
 ziale e^x può essere ricondotto alle operazioni algebriche
 mediante una formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Questa è una somma infinita, però, via via che si procede, gli addendi diventano sempre più piccoli, è quindi possibile calcolare e^x con precisione arbitraria semplicemente sommando una quantità sufficiente di addendi. È precisamente mediante formule come questa che calcolatrici e computer calcolano l'esponenziale.

Logaritmi

Definizione:

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Il logaritmo in base b di x è quel numero a cui devo elevare b per ottenere x .

In altri termini, i logaritmi non sono che esponenziali scritti in maniera buffa. La proprietà che definisce il logaritmo è appunto che queste due formule dicono la stessa cosa

$$\log_b \square = \triangle \iff b^\triangle = \square$$

qualunque espressione ci sia al posto di $\triangle$ e $\square$.

Lo stesso può essere espresso mediante questa identità, che è importante conoscere

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b (b^y) = y$$

Perché valgono queste identità? Se, al posto di $\square$,

scriviamo x , e al posto di $\Delta \log_b x$, abbiamo

$$\log_b \square = \Delta \longleftrightarrow b^\Delta = \square$$

$$\log_b x = \log_b x \longleftrightarrow b^{\log_b x} = x$$

Dal momento che la formula di sinistra è ovviamente vera — dice che una cosa è uguale a se stessa — anche la formula di destra deve essere vera.

Questa è la prima identità, la seconda si ottiene analogamente ponendo $\square = b^y$ e $\Delta = y$.

Proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi sono proprietà dell'esponenziale scritte in maniera buffa.

P. DELL'ESPONENZIALE

$$b^0 = 1$$

$$b^1 = b$$

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$b^x / b^y = b^{x-y}$$

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

P. CORRISPONDENTE DEI LOGARITMI

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b (x^y) = y \cdot \log_b (x)$$

$$\log_b (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_b (x)$$

Approfondimento. Giustifichiamo, per esempio, la formula per $\log_b(x \cdot y)$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \iff b^{\log_b x + \log_b y} = x \cdot y$$

Proprietà dell'esponenziale

$$\underbrace{b^{\log_b x}}_x \cdot \underbrace{b^{\log_b y}}_y = x \cdot y$$

OK!

Esercizio. Calcolare $\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right)$

Metodo 1 (proprietà dell'esponenziale)

Siccome è richiesto il logaritmo in base 2, iniziamo con lo scrivere l'argomento del logaritmo, $\frac{8^{3.7}}{4}$, come potenza di 2.

$$\frac{8^{3.7}}{4} = \frac{(2^3)^{3.7}}{2^2} = \frac{2^{3 \cdot 3.7}}{2^2} = 2^{3 \cdot 3.7 - 2} = 2^{9.1}$$

ora, usando l'identità $\log_b(b^y) = y$

$$\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) = \log_2(2^{9.1}) = \boxed{9.1}$$

Metodo 2 (proprietà dei logaritmi)

$$\begin{aligned} \log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) &= \log_2(8^{3.7}) - \log_2(4) = 3.7 \cdot \log_2(8) - \log_2(4) \\ &= 3.7 \cdot 3 - 2 = \boxed{9.1} \end{aligned}$$

$\underbrace{= 3}_{2^3=8} \text{ siccome}$ $\underbrace{= 2}_{2^2=4} \text{ siccome}$

Osservazione: in pratica, i due approcci a questo esercizio sono due maniere diverse di scrivere precisamente i medesimi calcoli.

