

Formula del cambiamento di base dei logaritmi

Di solito calcolatrici e linguaggi informatici forniscono la funzione logaritmo solo in alcune basi: tipicamente in base e — detto *logaritmo naturale*, in alcuni sistemi viene rappresentato semplicemente come $\log$, in altri col simbolo $\ln$ — e in base 10 — anch'esso denotato, alla volta semplicemente dal simbolo $\log$.

Nota. Quando si incontra una funzione chiamata "log" in un contesto che non si conosce, è cosa saggia accertarsi di quale sia la base di questo logaritmo.

È facile ricondurre i logaritmi in una base x qualunque a quelli in un'altra base b — tipicamente e o 10 — grazie a questa formula.

$$\log_x y = \frac{\log_b y}{\log_b x}$$

Per esempio, se desidero calcolare $\log_7 15$ e dispongo solo di una funzione per i logaritmi in base 10, posso calcolare

$$\log_7 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 7} \approx \frac{1.17603}{0.845098} \approx 1.39$$

Approfondimento: per verificare la formula dobbiamo vedere che

$$x^{\frac{\log_b y}{\log_b x}} = y$$

$$\underbrace{x^{\frac{\log_b y}{\log_b x}}}_{= \underbrace{\left(b^{\log_b x} \right)^{\frac{\log_b y}{\log_b x}}}_{= b^{\frac{\log_b y}{\log_b x}}}}_{= \underbrace{b^{\log_b y}}_{= y}} = y$$

↙ Identità $b^{\log_b a} = a$ ↘

Esercizi: dalle "domande di preparazione al test"

Nota: questi esercizi devono poter essere senza calcolatrice.

37 - Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5

Possiamo intanto calcolare $4^{1.5} = 4^1 \cdot 4^{0.5} = 4 \cdot \sqrt{4} = 8$

Inoltre $10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.2$

Quindi l'ordine crescente corretto è

$$\boxed{10^{0.5} \leq 5 \leq 4^{1.5}}$$

40 - Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$

$$\underbrace{10^{3+x}}_{= \underbrace{1000}_{10^3} \cdot 10^x = 100^{x-7} = (10^2)^{x-7} = 10^{2 \cdot (x-7)}}_{\rightarrow 10^{3+x} = 10^{2 \cdot (x-7)}} \leftarrow$$

$$3+x = 2 \cdot (x-7) \rightarrow \boxed{x=17}$$

41 - Risolvi $10^{2x} + 10^x - 2 = 0$

Usando l'identità $10^{2x} = (10^x)^2$, l'equazione diventa

$$(10^x)^2 + 10^x - 2 = 0$$

Che è un'equazione di secondo grado nell'indeterminata 10^x . Riscriviamo quindi l'equazione ponendo $y = 10^x$.

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad y = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

Se $y=1$, allora $10^x = 1$, quindi $x = \log_{10}(1) = 0$.

D'altro canto $y=-2$ è impossibile, perché avremmo $10^x = -2$, e l'esponenziale 10^x è necessariamente positivo.

In conclusione, c'è la sola soluzione $\boxed{x=0}$

54 - Sapendo che $\log_e x = 10$, quanto vale $\log_e (x \cdot \sqrt{x})$?

Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_e (x \cdot \sqrt{x}) = \log_e (x) + \log_e (\sqrt{x}) = \underbrace{\log_e (x)}_{10} + \underbrace{\frac{1}{2} \log_e (x)}_5 = \boxed{15}$$

51 - Sapendo che $\log_{10} x = 12.4$ quanto vale $\log_{100} x$?

Applicando la formula di cambiamento di base

$$\log_{100} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 100} = \frac{12.4}{2} = \boxed{6.2}$$

Crescite & decadimenti esponenziali

Molti fenomeni sono descritti da una formula del tipo

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(t_0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t-t_0}{\tau}}$$

questi fenomeni sono detti: crescite o decadimenti esponenziali, rispettivamente se l'esponenziale è crescente o decrescente — l'esponenziale è crescente se o $\text{base} > 0$ o il segno all'esponente è $+$, o $0 < \text{base} < 1$

e il segno è $-$; altrimenti è decrescente.

I parametri della formula non sono determinati; in modo univoco dal fenomeno rappresentato, vale a dire che c'è una certa misura di libertà nella loro scelta.

Per esempio

$$\underline{100 \cdot 4^{\frac{t-35}{65}}} = 100 \cdot 2^{2 \cdot \frac{t-35}{65}} = 100 \cdot 2^{\frac{t}{35} - 1} = \underline{50 \cdot 2^{\frac{t}{35}}}$$

vediamo quindi che le scelte di parametri

$$t_0 = 35$$

$$t_0 = 0$$

$$\tau = 65$$

$$\tau = 35$$

$$\text{base} = 4$$

$$\text{base} = 2$$

$$V(t_0) = 100$$

$$V(t_0) = 50$$

sono equivalenti: descrivono il medesimo fenomeno.

In generale, possiamo fissare t_0 e la base ad arbitrio, e la formula rimane generale. Frequentemente si prende $t_0 = 0$, e la base più comoda a seconda della applicazione.

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t}{\tau}}$$

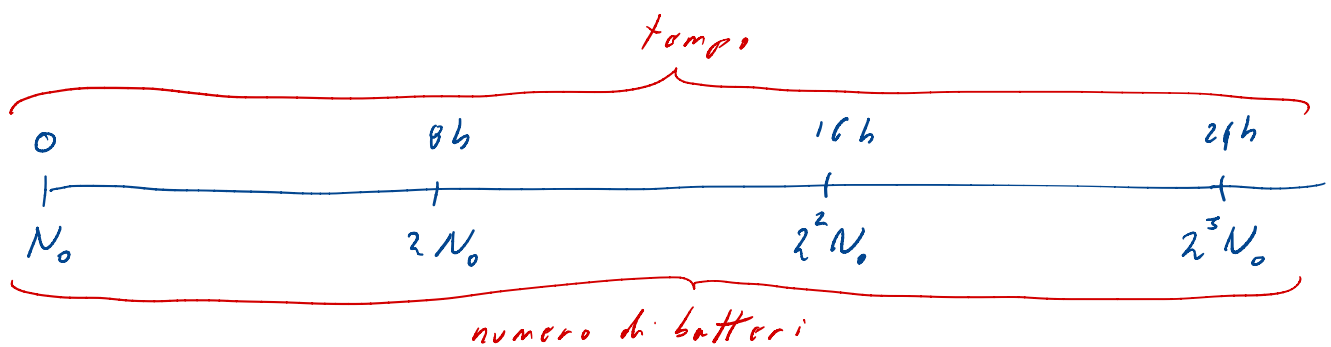
Caso particolare $t_0 = 0$, spesso $\text{base} = 2, 10, e$.

Nota. quando studieremo le equazioni differenziali, vedremo che gli esponenziali risolvono una classe naturale di equazioni lineari; e questo ne spiega l'utilità.

Esercizio

I batteri in una coltura raddoppiano ogni otto ore, dopo quanto tempo sono triplicati?

I batteri raddoppiano ogni 8 ore, quindi, in 8 ore, il loro numero si moltiplica per 2, in 16 per 2 *due volte*, ossia per 2^2 , in 24 per 2 *tre volte*, ossia per 2^3 , etc.



In generale, detto N_t il numero di batteri abbiamo

$$N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{8h}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Numero di periodi di} \\ \text{8 ore fra } t_0 \text{ e } t \end{array} \right\}$$

questa formula è vera non solo quando l'esponente del 2 è intero, ma in generale, per ogni t . La crescita di una colonia di batteri — *quando non è limitata dalla disponibilità di nutrienti o di spazio* — è, anzi, l'esempio tipico di crescita esponenziale.

L'esercizio chiede di trovare a che tempo t_2

$$N_{t_2} = N_0 \cdot 3$$

← ?

Siccome, dalla formula generale, $N_{t_1} = N_0 \cdot 2^{\frac{t_1}{8h}}$, abbiamo l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 2^{\frac{t_1}{8h}} = \cancel{N_0} \cdot 3$$

$$2^{\frac{t_1}{8h}} = 3$$

$$\frac{t_1}{8h} = \log_2 3$$

$$\underline{t_1 = 8 \cdot \log_2(3) h}$$

Per ottenere un risultato in forma numerica, possiamo adoperare la formula del cambiamento di base

$$t_1 = 8 \log_2(3) h = 8 \frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)} h \approx \boxed{12.7 h}$$

Esercizio

Il carbonio-14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del C che ha un tempo di dimezzamento di 5700 anni. La concentrazione di ^{14}C in una mummia è il 40.0% di quella in un vivente. A quanto tempo fa risale la mummia?

Questo è, invece, l'esempio tipico di decadimento esponenziale: il decadimento radioattivo. Il tempo di dimezzamento è, per definizione il tempo che impiega metà del ^{14}C in un campione a decadere — in sostanza trasformandosi in azoto. Quindi dopo 5700 anni la concentrazione di ^{14}C nel campione è la metà di quella iniziale, 2 · 5700 anni è $\frac{1}{4}$, dopo 3 · 5700 anni è $\frac{1}{8}$ &c.

In generale

$$^{14}\text{C} \text{ al tempo } t = ^{14}\text{C} \text{ iniziale} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700 \text{ anni}}}$$

L'esercizio ci chiede a che tempo t valga

$$^{14}\text{C} \text{ al tempo } t = ^{14}\text{C} \text{ iniziale} \cdot \frac{40}{100}$$

Come nell'esempio precedente otteniamo, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700 \text{ anni}}} = \frac{40}{100}$$

$$t = 5700 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{40}{100}\right) \text{ anni} = 5700 \cdot \frac{\log_{10} 0.4}{\log_{10} 0.5} \text{ anni} \approx \boxed{7500 \text{ anni}}$$

Nota: in realtà, la datazione al ^{14}C , anche senza considerare la difficoltà di misurare accuratamente la concentrazione di ^{14}C in un campione archeologico, è una questione più complicata di quanto potrebbe sembrare da questo esercizio. Principalmente, il guaio è che bisogna assumere una concentrazione iniziale pari a quella presente nell'atmosfera quando il campione era in vita, però questa concentrazione non si è mantenuta costante durante i millenni. Occorre, dunque, in qualche modo, ricostruire quanto ^{14}C ci fosse nell'atmosfera millenni fa, per poi calibrare la procedura in modo da tenere conto di questa informazione.

Esercizi consigliati

① Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni 5 ore.

- Di quanto cresce, in percentuale in dodici ore?
E in tre?

- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

② Esame del 31.I.2019 esercizio A.2,3

Una popolazione cresce in maniera esponenziale.

Al tempo 0 ci sono 200000 individui. Dopo 24 ore ce ne sono 500000. Quanti individui ci sono al tempo 12 ore?

Se il numero iniziale ha un'incertezza di ± 10000 , e il numero finale ± 25000 , che incertezza c'è sulla risposta?

③ Esame del 23.V.2013 esercizio B.1,3

Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore.

Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

- Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?

- Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

- Si è misurato che al tempo $t=0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t=10h \pm 20m$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

④ ESERCIZIO C Esame online 24-VI-2020

Una coltura di batteri cresce esponenzialmente. Si è stabilito che ad un certo tempo essa è costituita da $(6.1 \pm 0.1) 10^6$ individui. Dopo esattamente ventiquattro ore, il numero di individui è $(7.9 \pm 0.1) 10^{10}$. Ogni quanto tempo la coltura raddoppia (3 pt.)? Che incertezza relativa hai su questo risultato (3 pt.)?

Soluzioni: (fornite per lo studio individuale)

① Sappiamo che incrementare una quantità dello $x\%$ significa moltiplicarla per $1 + \frac{x}{100}$. Il numero dei batteri si moltiplica quindi per 1.5 ogni sei ore. Di conseguenza il numero di batteri N_t al tempo t vale

$$N_t = N_0 \cdot 1.5^{\frac{t}{6h}}$$

Possiamo dunque scrivere il numero dei batteri dopo dodici ore dall'inizio della crescita: $N_{12h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{12h}{6h}} = N_0 \cdot 1.5^2 = N_0 \cdot 2.25$

Detto $x_{12h}\%$ l'incremento percentuale della popolazione in 12 ore abbiamo altresì $N_{12h} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{x_{12h}}{100}\right)$

Di conseguenza

$$\cancel{N_0} \cdot 2.25 = \cancel{N_0} \cdot \left(1 + \frac{x_{12h}}{100}\right) \Rightarrow \underline{x_{12h} = 125}$$

Procedendo alla stessa maniera per x_{3h}

$$N_{3h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{3h}{6h}} = N_0 \cdot \sqrt{1.5}$$

$$N_{3h} = N_0 \left(1 + \frac{x_{3h}}{100} \right)$$

$$x_{3h} = 100 \cdot (\sqrt{1.5} - 1) \approx \underline{22.5}$$

Gli incrementi percentuali cercati sono quindi 125% e ~22.5%

Per la seconda domanda è necessario procedere in senso inverso. Dobbiamo trovare a che tempo $t_{10\%}$ la coltura è cresciuta del 10%, ossia $N_{t_{10\%}} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{10}{100} \right)$.

Abbiamo quindi l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{10\%}}{6h}} = \cancel{N_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100} \right)}_{1.1} \Rightarrow t_{10\%} = 6h \cdot \log_{1.5}(1.1) \approx \underline{1.4104 h}$$

Similmente, detto t_2 il secondo tempo richiesto

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_2}{6h}} = \cancel{N_0} \cdot 2 \Rightarrow t_2 = 6h \cdot \log_{1.5}(2) \approx \underline{10.2571 h}$$

I tempi richiesti sono quindi ~1h 25m e ~10h 15m.

② ③ Questi esercizi sono parti di problemi che potremo risolvere in maniera completa usando strumenti che saranno introdotti più avanti. Le soluzioni si trovano rispettivamente alle pagine 134-5 e 138-9, 142 delle note dell'anno accademico 2019-20.

④ ESERCIZIO C Esame online 24-VI-2020

Una coltura di batteri cresce esponenzialmente. Si è stabilito che ad un certo tempo essa è costituita da $(6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6$ individui. Dopo esattamente ventiquattro ore, il numero di individui è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{10}$. Ogni quanto tempo la coltura raddoppia (3 pt.)? Che incertezza relativa hai su questo risultato (3 pt.)?

Il numero di batteri al tempo t è $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$
dove $N_0 = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6$ e τ è il tempo richiesto.

Quindi:

$$(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{10} = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}}$$

$$2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}} = \frac{7.9 \pm 0.1}{6.1 \pm 0.1} \cdot 10^4 = 1.2951 \cdot 10^4 \pm 2.91\%$$

$\pm 1.27\%$ (on 7.9)
 $\pm 1.64\%$ (on 6.1)

$$= (1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4$$

$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{\log_2((1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4)}$$

} Chiamiamo questo D

Ora possiamo procedere calcolando l'intervallo di incertezza del denominatore D.

$$\log_2((1.2951 - 0.0376) \cdot 10^4) \leq D \leq \log_2((1.2951 + 0.0376) \cdot 10^4)$$

$$13.618 \leq D \leq 13.702$$

Di conseguenza $D = 13.661 \pm 0.042$

$\leftarrow \log_2(1.2951 \cdot 10^4)$

$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{13.661 \pm 0.042} = 105.4 \pm 0.3\% \text{ min}$$

$\pm 0.31\%$ (on 13.661)

Nota: l'accuratezza di questo risultato NON è realistica, nella realtà i dati sono meno precisi, e la crescita non è esattamente esponenziale.

fina l. 13

