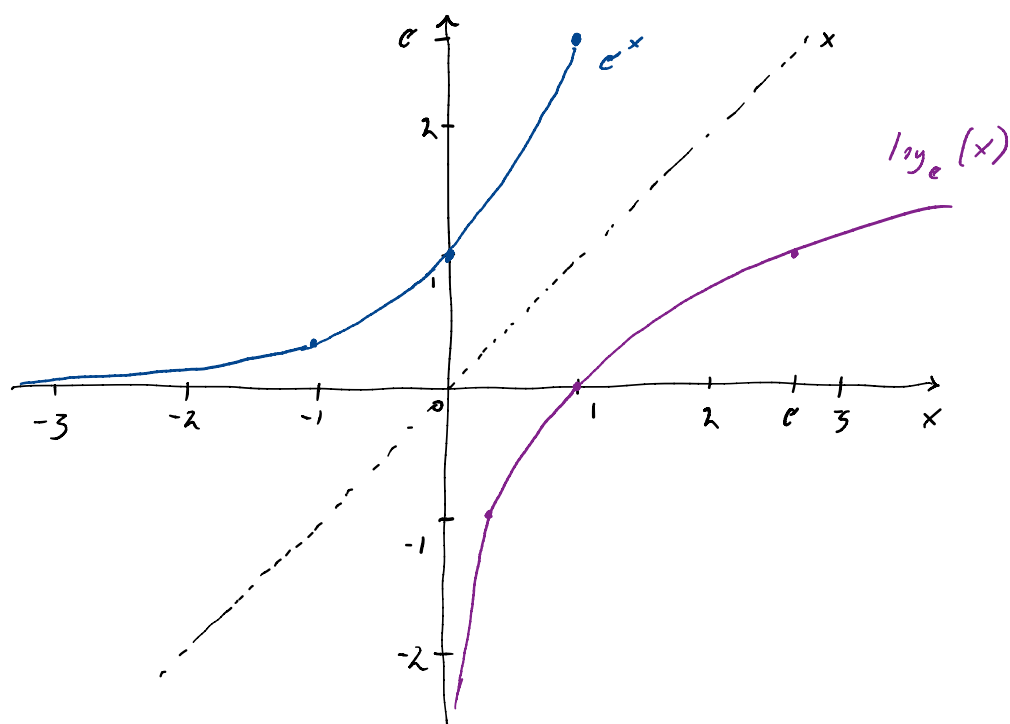


Il grafico del logaritmo

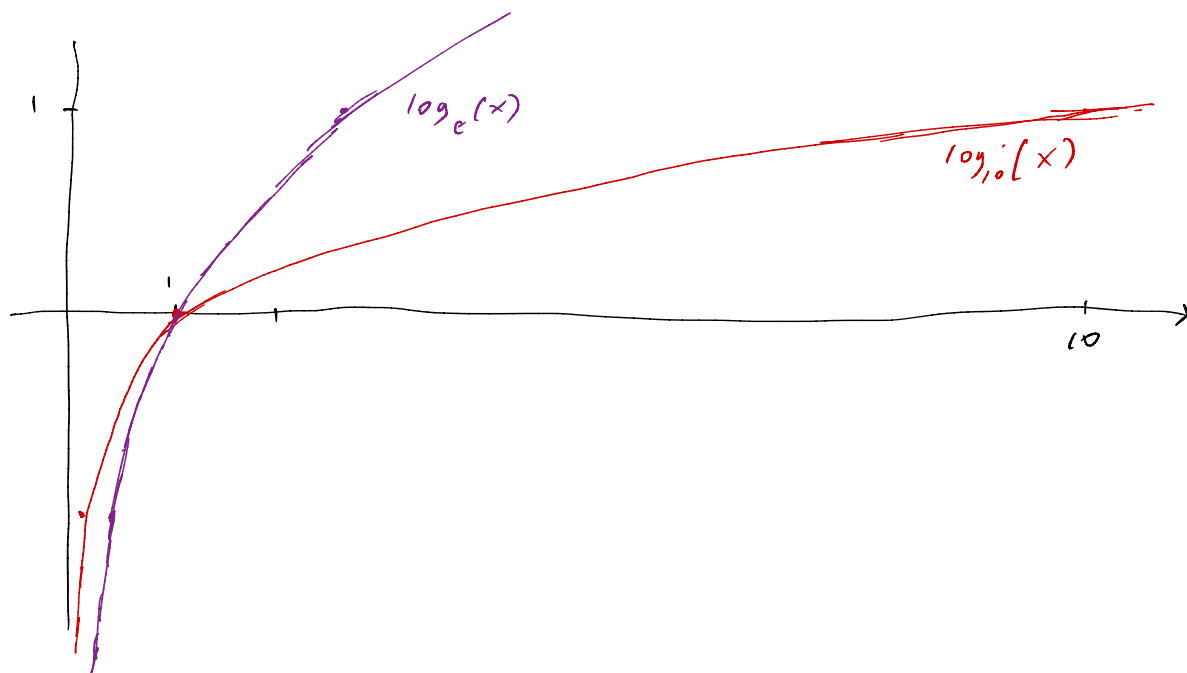


Vediamo qui il grafico di $\log_e x$. Come possiamo osservare, il logaritmo è definito solo per x positive — *siccome i valori assunti dall'esponenziale sono necessariamente positivi*. Inoltre il grafico di $\log_e x$ e quello di e^x sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice degli assi. Questo capiterebbe per qualunque base, ed è conseguenza del fatto che l'esponenziale con base e ed il logaritmo in base e sono funzioni inverse l'una dell'altra, vale a dire:

$$y = e^x \iff x = \log_e y$$

Via via che la x si avvicina decrescendo a 0, $\log_e x$ scende sotto qualunque soglia negativa — *come vedremo*

si dice che "tende a meno infinito". Al crescere di x , d'altro canto $\log_e x$ cresce superando qualsiasi soglia — "tende a più infinito".



I grafici in basi diverse sono simili; per la formula di cambiamento di base sono, anzi, proporzionali. Se $a < b$ allora $\log_a$ cresce più velocemente di $\log_b$ al crescere di x .

Il linguaggio dei limiti

Ci siamo trovati più di una volta nella necessità di parlare del comportamento di una funzione $f(x)$ quando x si avvicina ad un certo valore x_0 , quando $f(x_0)$ non fosse neanche definita — per esempio $\log_e x$ e $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x vicina a 0. I limiti sono un modo di descrivere il comportamento di una funzione $f(x)$ nelle immediate vicinanze di un

punto x_0 , anche quando $f(x_0)$ potrebbe non essere definita. I limiti possono anche essere calcolati, e alcuni studenti avranno visto questo genere di calcoli nella scuola superiore, tuttavia noi non vedremo come si calcolano i limiti. Lo scopo della trattazione in questo corso è semplicemente che vedendo un dato comportamento, rappresentato graficamente, lo si sappia descrivere adoperando il linguaggio dei limiti, e, viceversa, che data un'espressione come $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ si sappia quale comportamento della funzione f essa denota.

Limiti per x tendente a x_0^+ — " x_0 più"

Fissiamo un numero x_0 . Le seguenti espressioni:

il limite per x tendente a x_0^+ di $f(x)$ è —

il limite per x tendente a x_0 da destra di $f(x)$ è —

il limite destro per x tendente a x_0 di $f(x)$ è —

$f(x)$ tende a — per x tendente a x_0^+

$f(x)$ tende a — per x tendente a x_0 da destra

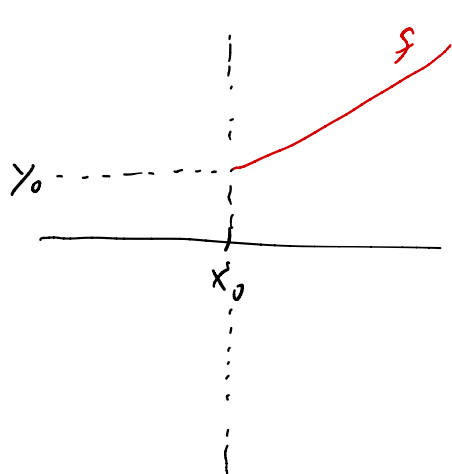
e anche le notazioni simboliche

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \text{—}$$

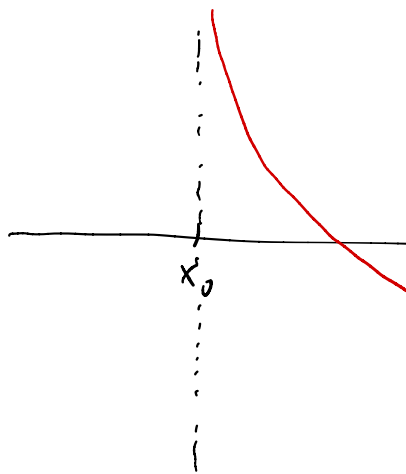
$$f(x) \rightarrow \text{—} \text{ per } x \rightarrow x_0^+$$

hanno il medesimo significato e si riferiscono al comportamento di f per valori di x appena più grandi di x_0 . Al posto del trattino — possiamo avere un numero y_0 , il simbolo $+\infty$ — più infinito — il simbolo $-\infty$ — meno infinito —

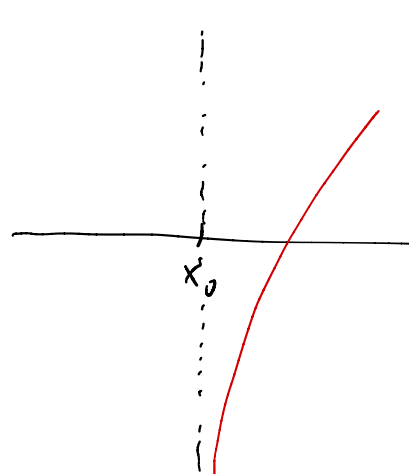
oppure, infine, possiamo dire che il limite non esiste.
 In questa tabella vediamo i comportamenti rappresentati dai casi in cui il limite per $x \rightarrow x_0^+$ esiste



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$$



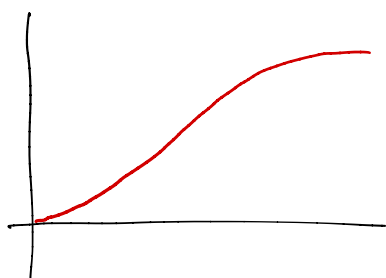
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

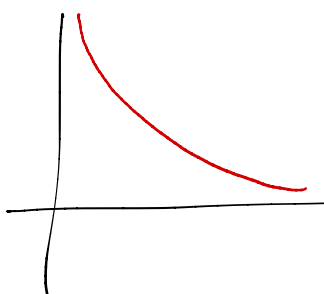
Esempi:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$



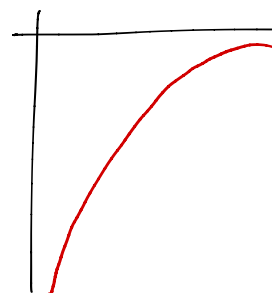
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

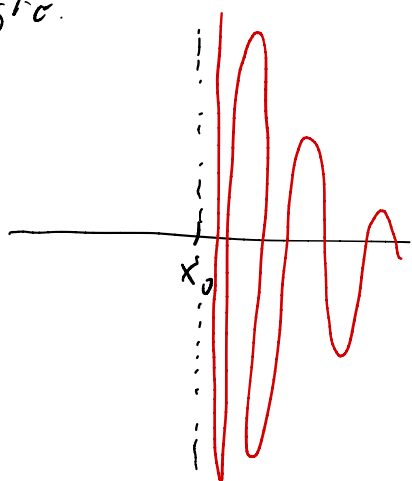


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$$

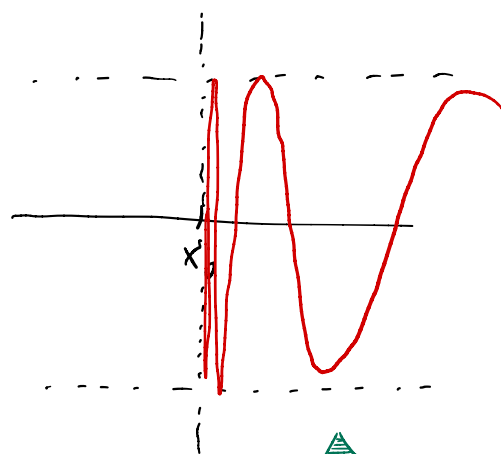
Noi osserviamo l'andamento dei valori assunti da $f(x)$ quando x si avvicina a x_0 provenendo da destra. Se questi valori si avvicinano ad un certo y_0 , allora diciamo che quello è il limite. Se salgono sopra ogni soglia fissata, o scendono sotto ogni soglia fissata, diciamo che, rispettivamente, il

limite è $+\infty$ o $-\infty$. Esiste la possibilità che non si verifichi nessuno di questi casi, e allora diciamo che il limite per $x \rightarrow x_0^+$ di $f(x)$ non esiste.

Gli esempi seguenti rappresentano funzioni che, all'avvicinarsi di x a x_0 da destra, esibiscono un comportamento oscillante. Il limite per $x \rightarrow x_0^+$, in questi casi, non esiste.



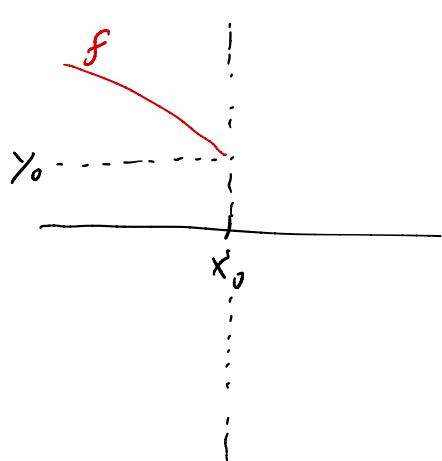
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ NON ESISTE



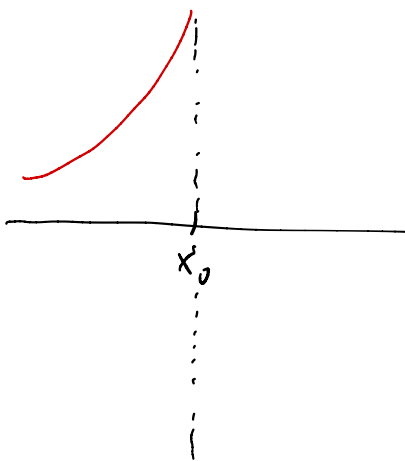
Eg. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in $x_0 = 0$

Limiti per x tendente a x_0^- — "x_0 meno"

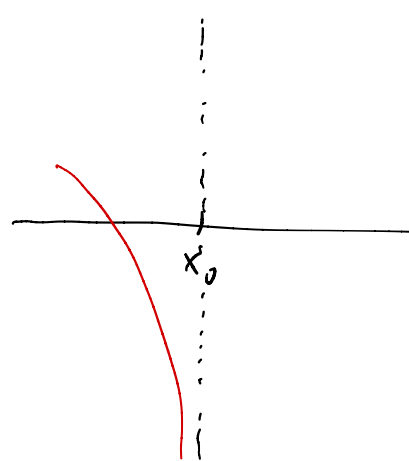
Il discorso, per i limiti sinistri, ossia per $x \rightarrow x_0^-$, è analogo, salvo che si studia il comportamento della funzione f per valori di x che si avvicinano da sinistra ad x_0 , ossia che sono appena più piccoli di x_0 .



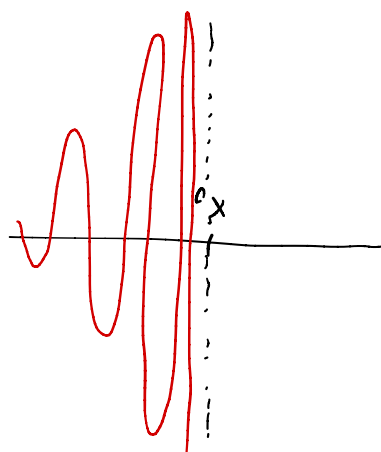
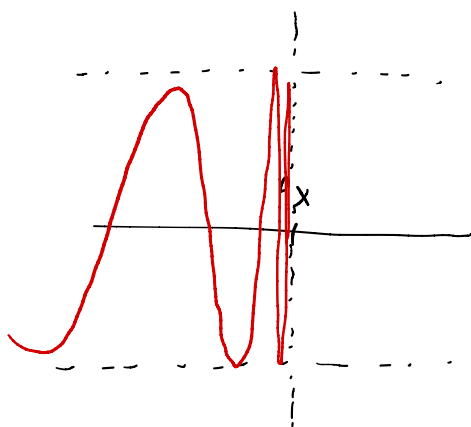
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Limiti per x tendente a x_0 ← senza $ne^+ + ne^-$

L'affermazione che il limite per $x \rightarrow x_0$ di $f(x)$ è un certo valore indica semplicemente che sia il limite destro sia il limite sinistro esistono, ed assumono entrambi quel medesimo valore. Se uno di questi non esistesse, oppure se esistono entrambi però assumono valori diversi, allora diciamo che il limite per $x \rightarrow x_0$ non esiste.

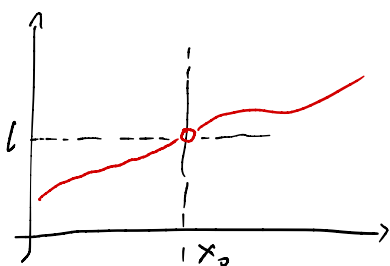
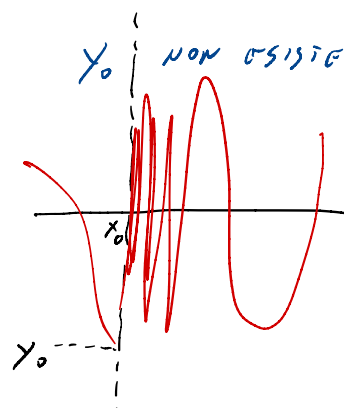
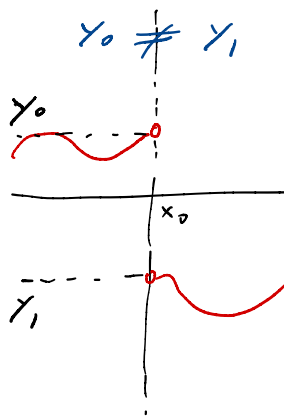
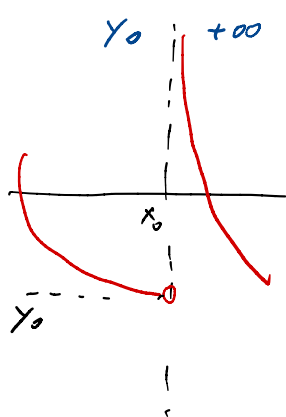
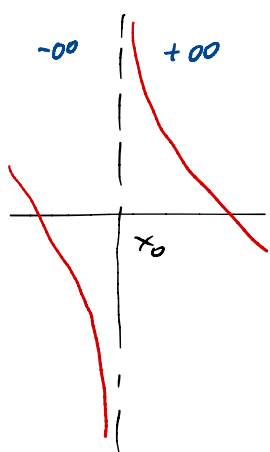
Ricapitolando:

" $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \square$ " equivale a " $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \square$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \square$ "

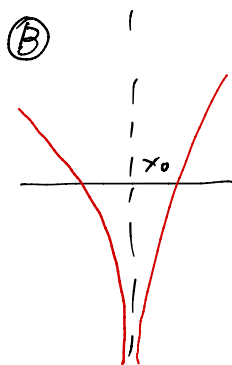
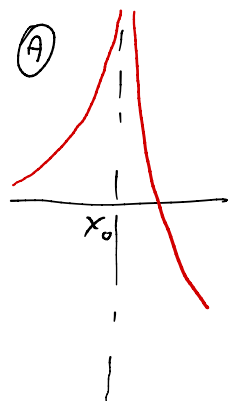
altrimenti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste

Esempi:

Nelle situazioni seguenti il limite non esiste.



In questo caso, invece il limite
di $f(x)$ per x tendente a x_0
è L . — $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

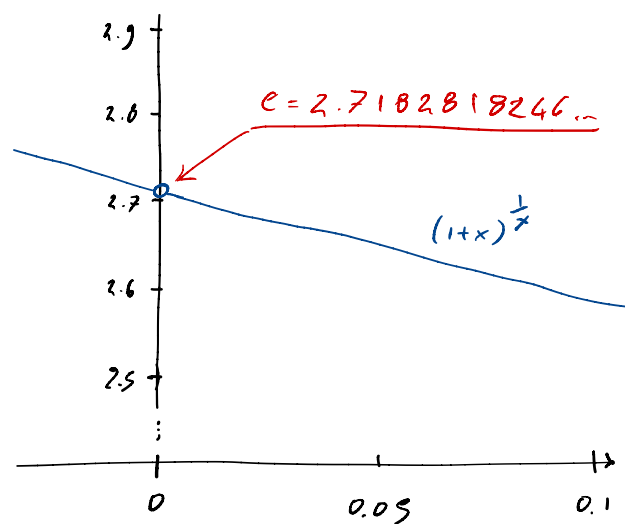


In questi casi diciamo
che f tende a $+\infty$ o $-\infty$
rispettivamente.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{(A)} \\ -\infty & \text{(B)} \end{cases}$$

Abbiamo visto un esempio di limite nella definizione del numero e :

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$



Esercizio

Traccia il grafico delle seguenti funzioni in prossimità di $x=0$ e determinare il comportamento al limite per $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0$.

$$f_1(x) = \frac{x-1}{\sin(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{\sin(x)}$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

$$f_4(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_5(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$f_6(x) = \frac{x+1}{x^3}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$f_8(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$f_9(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f_{10}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

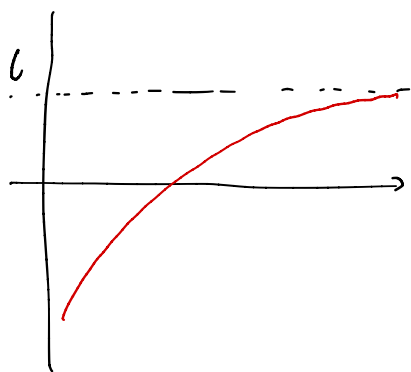
Limiti per $x \rightarrow +\infty$

Oltre a descrivere il comportamento di una funzione $f(x)$ per x vicino ad un certo valore, il linguaggio dei limiti permette anche di parlare del comportamento di $f(x)$ quando x cresce illimitatamente. In questo caso, è un po' come se x si avvicinasse ad un ipotetico punto $+\infty$ posto a destra di tutto l'asse x , e, per questo, si parla di limiti per x tendente a $+\infty$.

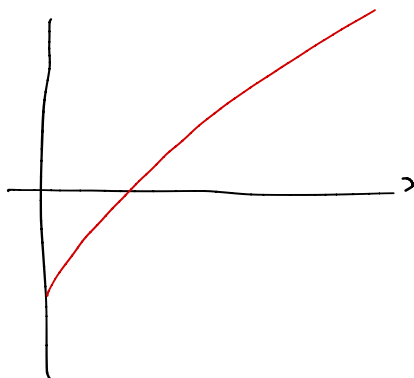
Se, al crescere di x , il valore di $f(x)$ si avvicina ad un certo valore l , allora il limite per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x)$ è l .

Se, invece, al crescere di x , $f(x)$ supera qualunque soglia fissata, allora il limite è $+\infty$. Viceversa, se $f(x)$ scende sotto qualunque soglia fissata, il limite è $-\infty$.

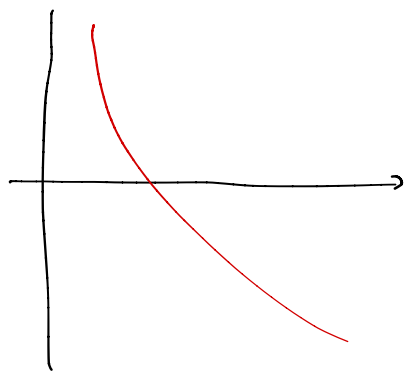
Infine, quando non capita nessuna di queste cose, per esempio perché $f(x)$ oscilla, allora il limite non esiste.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$



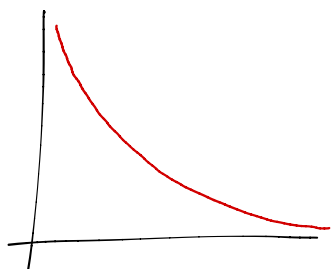
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$$

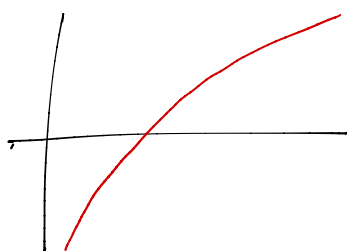
Esempi:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



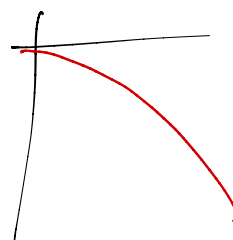
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \log_e(x)$$



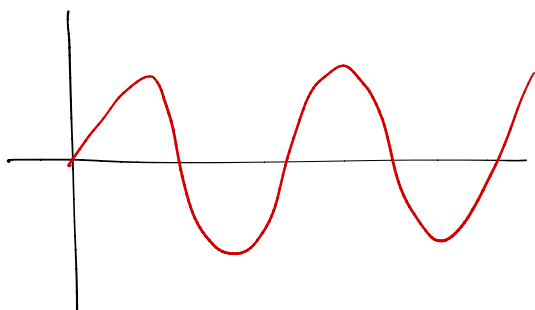
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e(x) = +\infty$$

$$f(x) = -x^2$$

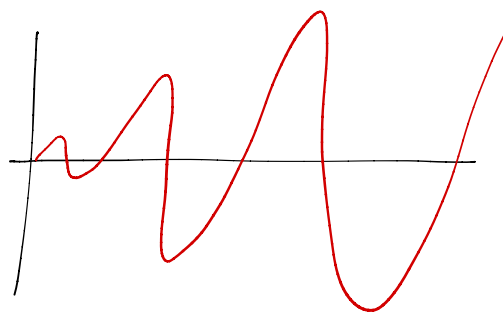


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

Nei casi seguenti, il limite per $x \rightarrow +\infty$ non esiste



es. $\sin(x)$

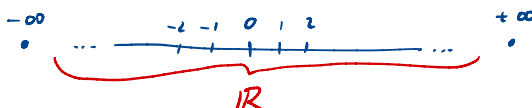


es. $x \cdot \sin(x)$

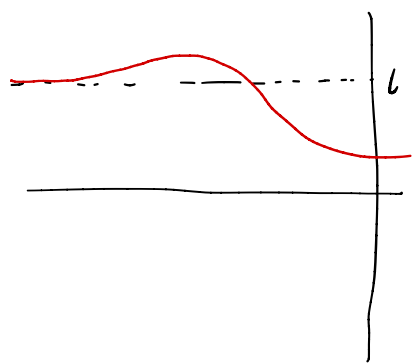
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Limiti per $x \rightarrow -\infty$

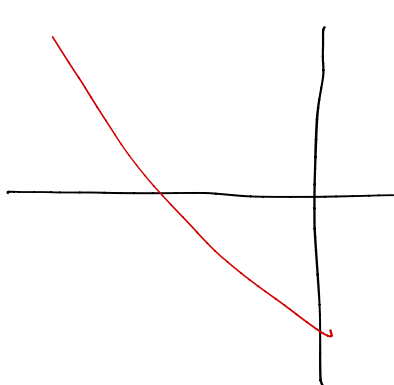
I limiti per $x \rightarrow -\infty$ sono definiti come quelli per $x \rightarrow +\infty$, salvo che ora studiamo $f(x)$ al decrescere di x , ossia via via che x si avvicina ad un punto ideale, $-\infty$, posto prima di tutti i numeri negativi.



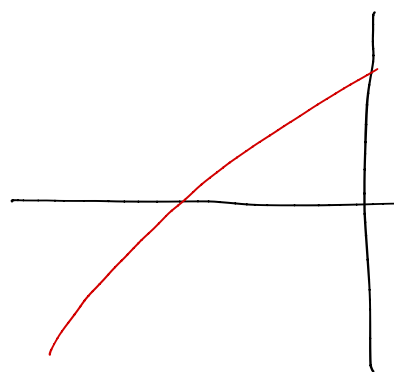
Casi in cui il limite per $x \rightarrow -\infty$ esista:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

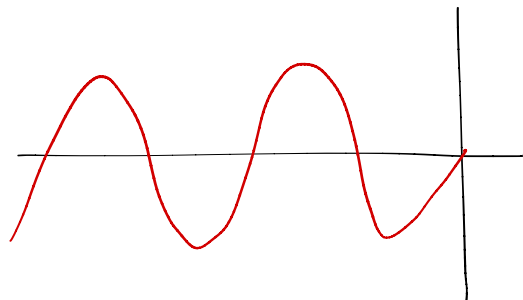
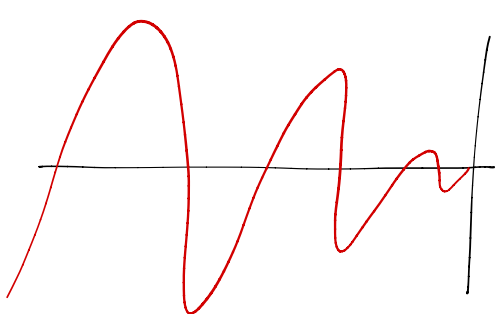


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$$

Casi in cui il limite per $x \rightarrow -\infty$ non esista:



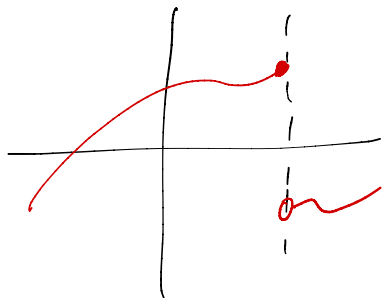
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Continuità

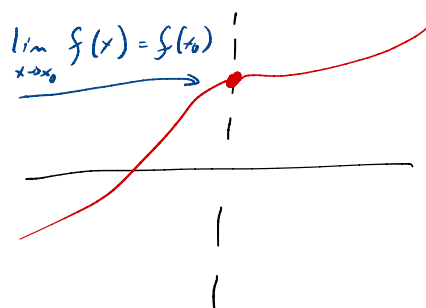
È utile notare che le funzioni elementari che abbiamo visto o vedremo in questo corso — polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche — sono continue nel loro dominio di definizione. Ossia, se prendiamo una di queste funzioni f , e un numero x_0 tale che $f(x_0)$ sia definita, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Questo è il modo formale di dire che il grafico di f non può fare salti.

in un punto in cui f è definita. Inoltre, questa proprietà si mantiene quando componiamo le funzioni elementari fra loro. Quindi, sebbene abbia senso parlare di limiti in qualunque punto x_0 , è interessante farlo solo a $\pm\infty$ e alla frontiera del dominio di definizione delle funzioni che tratteremo in questo corso.

QUESTO NON PUÒ AVVENIRE



INVECE DEVE AVVENIRE QUESTO



Insieme, per le funzioni che tratteremo noi, se $f(x_0)$ è definita, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, quindi, se f è definita in x_0 , sappiamo anche immediatamente che limite ha.

fine l. 14