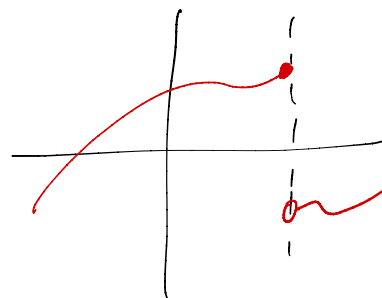
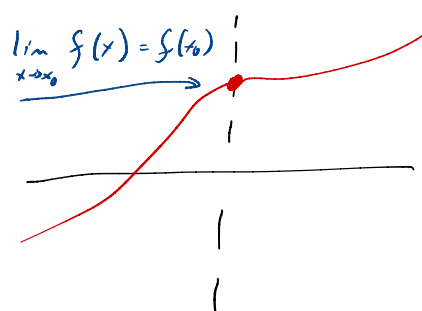


in un punto in cui f è definita. Inoltre, questa proprietà si mantiene quando componiamo le funzioni elementari fra loro. Quindi, sebbene abbia senso parlare di limiti in qualunque punto x_0 , è interessante farlo solo a $\pm\infty$ e alla frontiera del dominio di definizione delle funzioni che tratteremo in questo corso.

QUESTO NON PUÒ AVVENIRE



INVECE DEVE AVVENIRE QUESTO



Insomma, per le funzioni che tratteremo noi, se $f(x_0)$ è definita, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, quindi, se f è definita in x_0 , sappiamo anche immediatamente che limite ha.

fine l. 14

Limiti a $\pm\infty$ di polinomi

Il limite a $+\infty$ - ∞ di una funzione polinomiale che non sia una costante — una costante è un caso particolare di polinomio, quello in cui c'è solo il termine noto — è sempre $+\infty$ o $-\infty$. Per distinguere fra questi casi, conviene ricordare che, per $|x|$ grandi, domina il monomio di $p(x)$ che ha grado massimo, quindi il limite dipenderà da questo monomio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_d x^d$$

dove, ovviamente, $a_d \neq 0$.

Soluzioni dell'esercizio sui limiti:

		$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	$\lim_{x \rightarrow 0}$
$f_1(x) = \frac{x-1}{\sin(x)}$		$-\infty$	$+\infty$	NON ESISTE
$f_2(x) = \frac{e^x}{\sin(x)}$		$+\infty$	$-\infty$	NON ESISTE
$f_3(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$		1	1	1
$f_4(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$		$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	NON ESISTE
$f_5(x) = \frac{x-1}{x^2}$		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f_6(x) = \frac{x+1}{x^3}$		$+\infty$	$-\infty$	NON ESISTE
$f_7(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$		0	$+\infty$	NON ESISTE
$f_8(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$f_9(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$		0	0	0
$f_{10}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$		NON ESISTE	NON ESISTE	NON ESISTE

Quindi ci basta capire quale sia il limite per $x \rightarrow \pm \infty$ di $a_d x^d$. Vediamo intanto il limite di x^d .

Ricordando i grafici dei polinomi x^n vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^d = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^d = \begin{cases} +\infty & \text{se } d \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } d \text{ è dispari} \end{cases}$$

Ora è chiaro che se il coefficiente a_d è positivo i limiti di $a_d x^d$ sono semplicemente uguali a quelli di x^d , se a_d invece è negativo allora hanno segno inverso.

$$\text{Se } a_d > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_d x^d = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^d$$

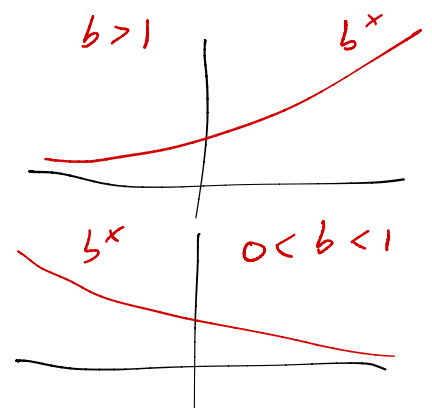
$$\text{Se } a_d < 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_d x^d = -\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^d$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{-7x^3}_{\text{grado massimo}} + 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{-7x^3}_{\text{dispari}} = \underbrace{-}_{- \infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$$

Limiti di esponenziali e logaritmi

Ricordando l'aspetto del grafico degli esponenziali, è chiaro che i limiti a $\pm \infty$ si comportano come segue:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

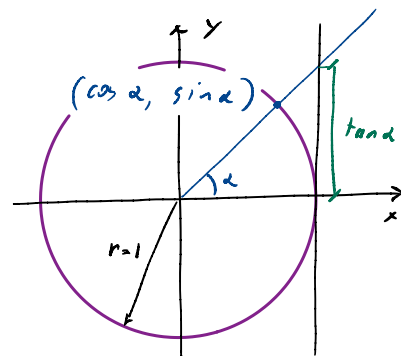
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Una regola simile vale per i logaritmi, ricordiamo però che il logaritmo è definito solo per numeri positivi, quindi siamo interessati ai limiti $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ripasso delle Funzioni Trigonometriche

Ricordiamo che le funzioni trigonometriche $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto di intersezione della semiretta che forma un angolo α , misurato in senso antiorario, col semiasse positivo delle ascisse, e della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Per definizione, poi,



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Osserviamo che:

- se non ci sono indicazioni contrarie, l'angolo α si intende misurato in radianti

- l'angolo α va considerato a meno di angoli giri (2π)

per esempio: $\sin(-\frac{5}{3}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{7}{3}\pi) = \dots$

Nota: il simbolo π è semplicemente il numero 3.1415926..., scrivere $\sin(0.752\pi)$ e $\sin(2.36)$, all'atto pratico, è la stessa cosa.

Cogliamo l'occasione di ricordare che si converte fra gradi

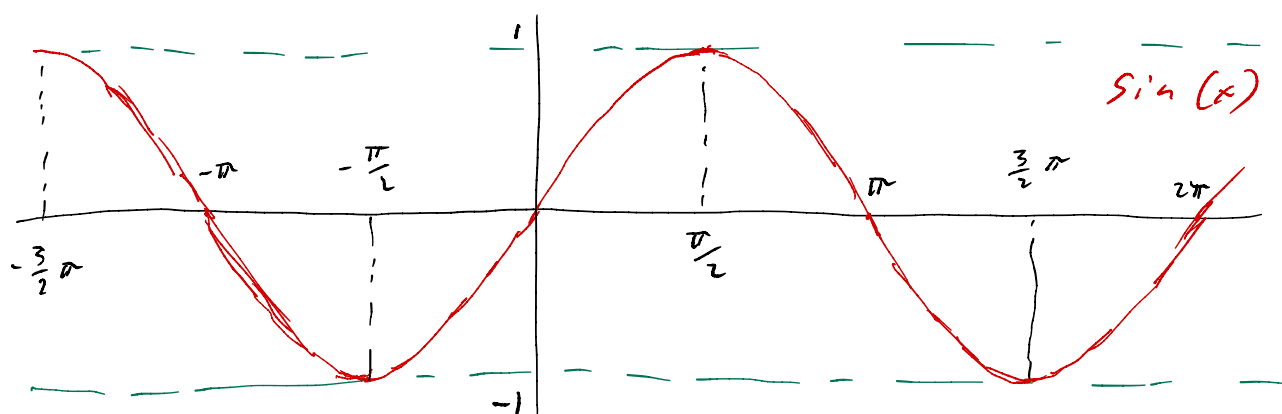
sessagesimali e radianti mediante la proporzione

$$\text{gradi} : \text{radianti} = 180 : \pi$$

grossolanamente, conviene ricordare che un radiante sono circa 60° .

L'importanza delle funzioni trigonometriche non risiede nel loro significato geometrico, bensì nel fatto che quasi tutti i fenomeni oscillatori in natura sono analizzati per mezzo di funzioni trigonometriche. Per esempio le soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti — vedremo — si esprimono sempre combinando esponenziali, polinomi, seni e cogeni. Ricordiamo i grafici di $\sin$, $\cos$, $\tan$.

Grafico del seno



$\sin(x)$ è limitata inferiormente da -1

ossia $\sin(x) \geq -1$ per qualunque valore di x

—— " —— limitata superiormente da 1

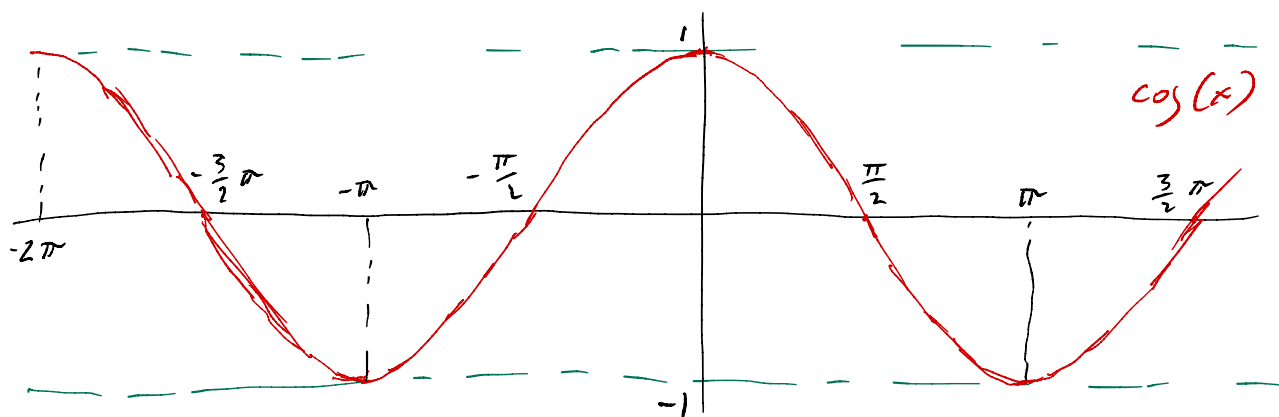
ossia $\sin(x) \leq 1$ per qualunque valore di x

—— " —— periodica di periodo 2π

ossia vale l'uguaglianza $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x)$ NON ESISTONO

Grafico del coseno



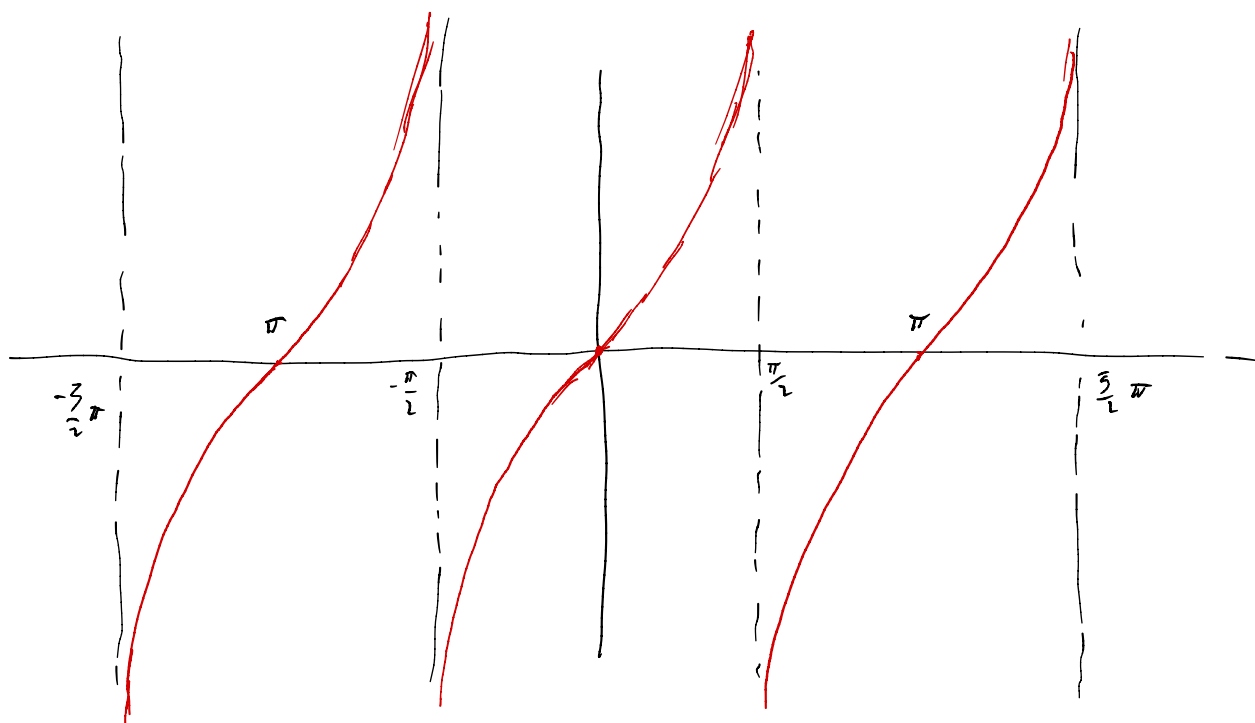
La funzione coseno gode delle medesime proprietà che abbiamo enunciato per il seno: $\cos(x)$ è limitata inferiormente da -1

—— " —— limitata superiormente da 1

—— " —— periodica di periodo 2π

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)$ NON ESISTONO

Grafico della tangente



$\tan(x)$ è periodica di periodo π

$\tan(x)$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k intero

ossia non è definita in $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, \dots$

$k = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots$

Abbiamo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

e più in generale $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Mentre chiaramente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan(x)$$

NON ESISTONO

Formule trigonometriche

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

Le formule di somma permettono di scrivere funzioni trigonometriche di una somma usando prodotti delle funzioni trigonometriche degli addendi:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Viceversa, le formule di prostaforezi permettono di passare da prodotti di funzioni trigonometriche a funzioni di somme e differenze dei loro argomenti. Esse si ricavano dalla formula

di somma. Vediamo, per esempio, come scrivere $\sin(x) \cdot \sin(y)$.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \cos(x+y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \leftarrow \text{f. di somma} \\ \cos(x-y) &= \cos(x) \underbrace{\cos(-y)}_{\downarrow} - \sin(x) \underbrace{\sin(-y)}_{\downarrow} \leftarrow \begin{cases} \text{scriviamo } -y \text{ al posto} \\ \text{di } y \end{cases} \\ \textcircled{2} \quad \cos(x-y) &= \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

calcolo $\textcircled{2} - \textcircled{1}$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \cdot \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

Funzioni trigonometriche inverse

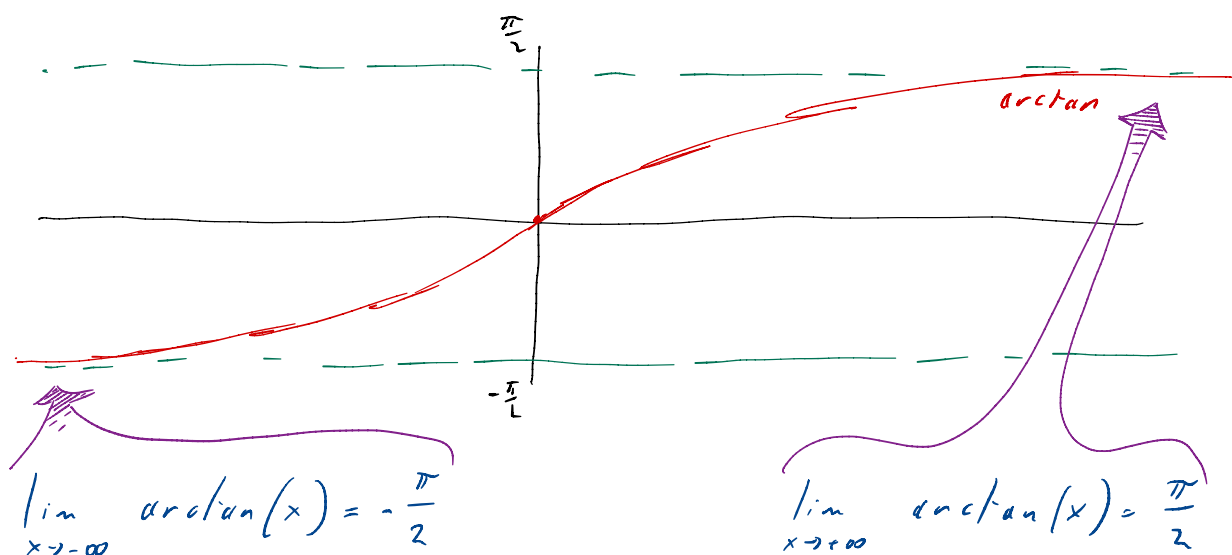
Le funzioni trigonometriche inverse $\arcsin$, $\arccos$ e $\arctan$ servono per ricavare l'angolo noto il suo seno, o il suo coseno, o la sua tangente. Siccome le funzioni trigonometriche sono periodiche, non è possibile determinare l'angolo in maniera univoca dato per esempio, il seno: la funzione $\arcsin(x)$ ci permette di trovare un angolo il cui seno è x , per trovare gli altri bisognerà far riferimento alle proprietà della funzione seno.

Funzione arcotangente

$\arctan(x)$ è quell'angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ la cui tangente vale x . In formule

$$y = \arctan(x) \iff \tan(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

è come se portandola dall'altra parte diventasse $\tan \dots$



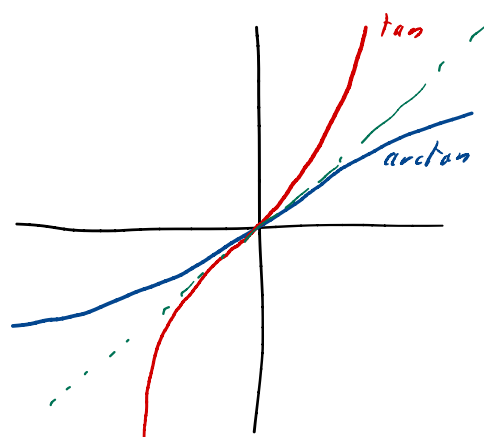
$\arctan(x)$ è limitata inferiormente da $-\frac{\pi}{2}$

—— " —— limitata superiormente da $\frac{\pi}{2}$

L'arcotangente permette di esprimere le soluzioni di un'equazione del tipo $\tan(x) = k$ data con un k fissato. Una delle soluzioni è $x_0 = \arctan(k)$. Le altre si ottengono sommando e sottraendo multipli di π , e si riassumono nella formula

$$x_i = \arctan(k) + i\pi \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Come abbiamo già notato parlando di esponenziale e logaritmo, i grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici — speculari — rispetto alla diagonale degli assi. Il grafico



di $\arctan$ è il simmetrico del grafico della tangente ristretto alle ascisse fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Funzione arcseno

$\arcsin(x)$ è quell'angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ il cui seno vale x . In formule

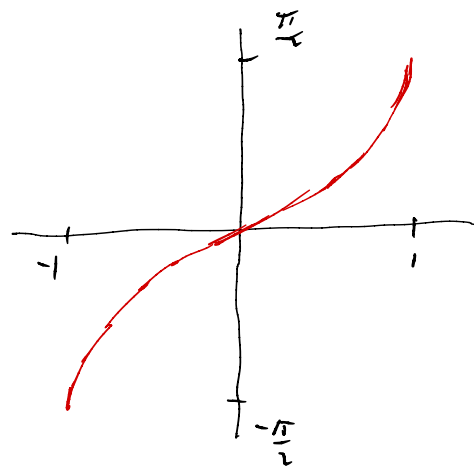
$$y = \arcsin(x) \iff \sin(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Volendo risolvere l'equazione

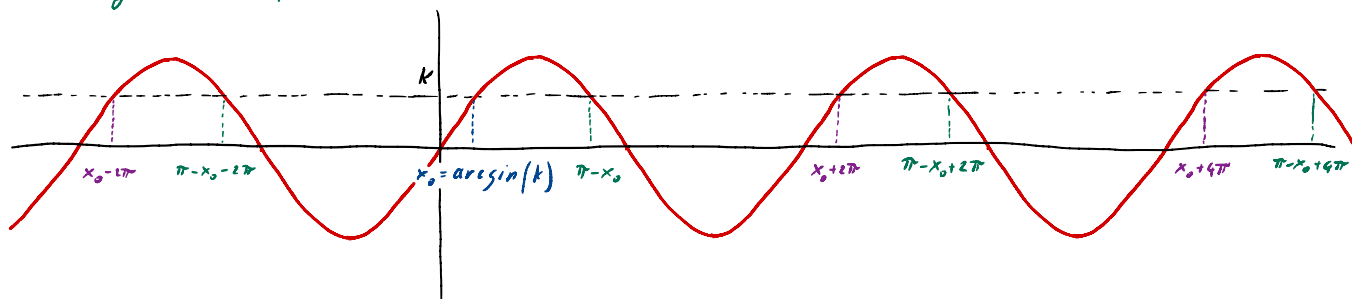
$$\sin(x) = k$$

a patto che $-1 \leq k \leq 1$, altrimenti è chiaro che l'equazione non ha soluzioni, otteniamo innanzitutto la soluzione

$$x_0 = \arcsin(k)$$



A questa, per via della periodicità del seno, si aggiungono tutti i numeri della forma $x_0 + 2k\pi$, ma queste non sono ancora tutte le soluzioni: ci sono anche i numeri della forma $\pi - x_0 + 2k\pi$.



Funzione arcocoseno

occhio, è diverso da arcsin e anche

$\arccos(x)$ è quell'angolo compreso fra 0 e π il cui coseno vale x . In formule

$$y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

L'equazione

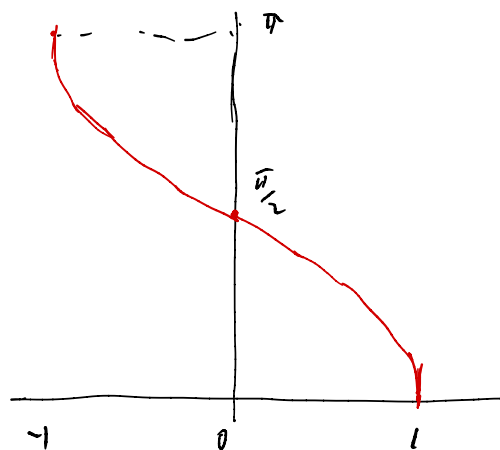
$$\cos(x) = k$$

ha soluzioni solo se $-1 \leq k \leq 1$. Detto

$$x_0 = \arccos(k)$$

queste sono i numeri della forma

$$\pm x_0 + 2k\pi$$



Terminologia

Ricapitoliamo alcuni termini che abbiamo usato nella discussione delle funzioni trigonometriche.

- $f(x)$ è periodica di periodo T se

$$f(x+T) = f(x)$$

per ogni valore della x .

Esercizio: qual è un periodo per $f(x) = \sin(x \cdot \sqrt{3})$?

Vogliamo scrivere un'identità del tipo

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\sin(\underbrace{(x+T) \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{2}}) = \sin(\underbrace{x \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{1}})$$

noi sappiamo che:

$$\sin(\underbrace{\square + 2\pi}_{\textcircled{2}}) = \sin(\underbrace{\square}_{\textcircled{1}})$$

otterremo quindi l'identità richiesta se ponendo $\square = x \cdot \sqrt{3}$

avessimo $\square + 2\pi = (x+T) \cdot \sqrt{3}$. Ora, sostituendo $\square$ ci serve:

$$\underbrace{x \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{1}} + 2\pi = (x+T) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \cancel{x \cdot \sqrt{3}} + 2\pi = \cancel{x \cdot \sqrt{3}} + T \cdot \sqrt{3}$$

da cui $\boxed{T = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi}$

Verifichiamo questa soluzione

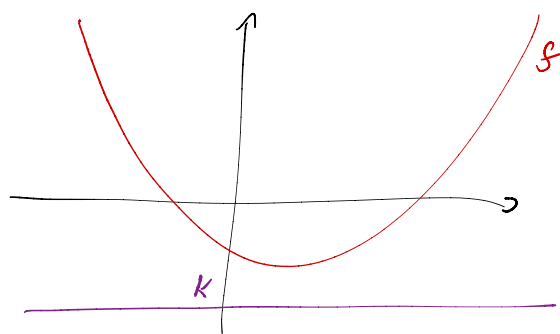
$$f(x+T) = f\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right) = \sin\left(\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right) \cdot \sqrt{3}\right) = \sin\left(x \cdot \sqrt{3} + 2\pi\right)$$

$$f(x) = \sin(x \cdot \sqrt{3}) \quad \leftarrow \text{= per la periodicit\`a del seno.}$$

- $f(x)$ \u00e8 superiormente limitata se c'\u00e8 un numero k con la propriet\u00e0 che $f(x) \leq k$ qualunque sia il valore di x .
- $f(x)$ \u00e8 inferiormente limitata se c'\u00e8 un numero k con la propriet\u00e0 che $f(x) \geq k$ qualunque sia il valore di x .

Graficamente, $f(x)$ \u00e8 superiormente/inferiormente limitata se il suo grafico sta tutto sotto/sopra una opportuna retta orizzontale.

Esercizio: dire se $f(x) = x^2 - 2x - 3$ sia sup/inf-eramente limitata.



"la parabola sta sempre sopra k "



" f \u00e8 inferiormente limitata da k "

D'altro canto f non \u00e8 superiormente limitata, perch\u00e9 assume valori arbitrariamente grandi.

Esercizio: dire se $f(x) = \sin(x) + x^2$ sia sup/inf-riormente limitata.

$f(x)$ è inferiormente limitata, infatti

$$f(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\geq -1} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} \geq -1$$

tuttavia non è superiormente limitata. Se lo fosse, infatti, varrebbe la disequazione

$$f(x) = \sin(x) + x^2 \leq k$$

$\Downarrow$

$$\underline{-1} \leq \sin(x) \leq \underline{k - x^2}$$



$$x^2 \leq k+1$$

che però non vale, perché x^2 può assumere valori arbitrariamente grandi.

fine l. 15