

Esercizio: dire se  $f(x) = \sin(x) + x^2$  sia sup/inf-riormente limitata.

$f(x)$  è inferiormente limitata, infatti

$$f(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\geq -1} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} \geq -1$$

tuttavia non è superiormente limitata. Se lo fosse, infatti, varrebbe la disequazione

$$f(x) = \sin(x) + x^2 \leq k$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{-1}_{\swarrow} \leq \sin(x) \leq \underbrace{k - x^2}_{\searrow}$$
$$x^2 \leq k + 1$$

che però non vale, perché  $x^2$  può assumere valori arbitrariamente grandi.

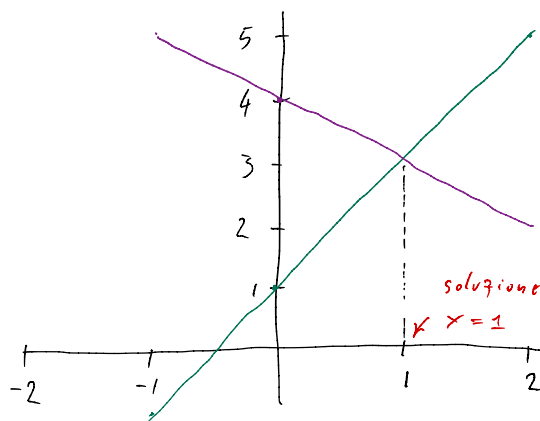
fine l. 15

### Soluzione grafica & numerica di equazioni

Risolvere l'equazione  $f(x) = g(x)$  significa trovare le ascisse dei punti di intersezione dei grafici di  $f$  e  $g$ .

Esempio

$$\underbrace{2x+1}_{f(x)} = \underbrace{4-x}_{g(x)}$$



Algebricamente

$$2x + 1 = 4 - x$$

$$2x + x = 4 - 1$$

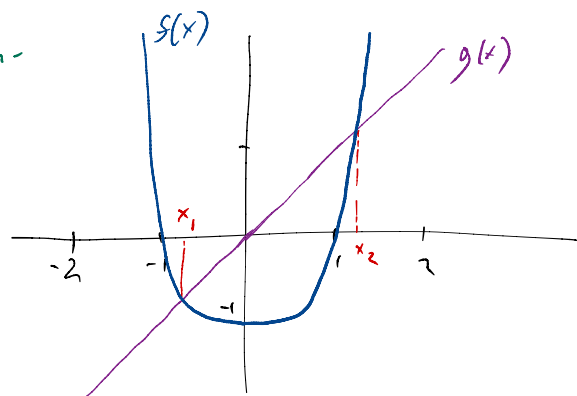
$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Esempio Quante soluzioni ha l'equazione  $x^4 - 1 = x$  ?

Se chiamiamo  $f$  e  $g$  i due membri dell'equazione  $x^4 - 1 = x$  e studiamo i

grafici di  $f$  e di  $g$ , vediamo che ci sono due intersezioni.



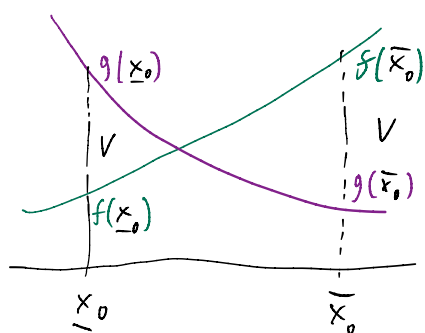
Quindi l'equazione ha due soluzioni.

Calcolo numerico delle soluzioni di  $f(x) = g(x)$

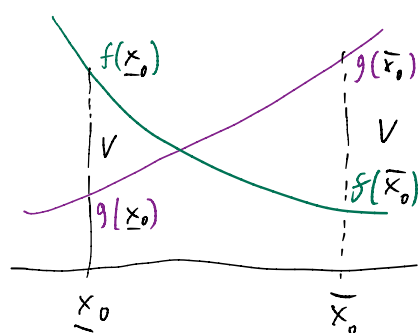
Molte equazioni non possono essere risolte in maniera algebrica — vale a dire per mezzo di formule esatte, come invece capita, per esempio, per le equazioni di primo e secondo grado. In questi casi è possibile stabilire, in maniera approssimativa, dove si trovino le soluzioni avvalendosi di un grafico, oppure di qualche ragionamento ad hoc. Poi, le soluzioni possono essere calcolate in maniera numerica, cioè approssimata.

Il metodo più semplice e più sicuro per risolvere numericamente un'equazione è per bisezione. Si parte da due valori  $x_0$  e  $\bar{x}_0$ , con  $x_0 < \bar{x}_0$ , tali che i grafici di  $f$  e  $g$  abbiano, fra questi due valori, precisamente una intersezione.

Ci troviamo, quindi, in uno dei casi seguenti:



Primo caso



Secondo caso

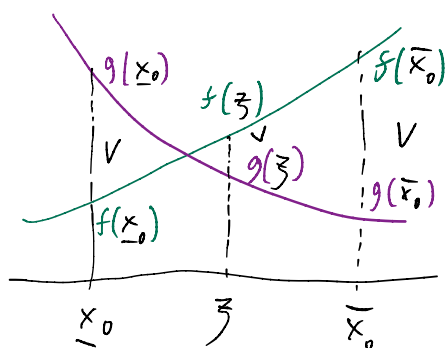
$$f(x_0) < g(x_0) \text{ e } f(\bar{x}_0) > g(\bar{x}_0) \quad f(x_0) > g(x_0) \text{ e } f(\bar{x}_0) < g(\bar{x}_0)$$

si passa dall'uno all'altro scambiando  $f$  e  $g$ .

Secondo che il grafico di  $f$  passi, nel punto di intersezione, da sotto il grafico di  $g$  a sopra, o viceversa.

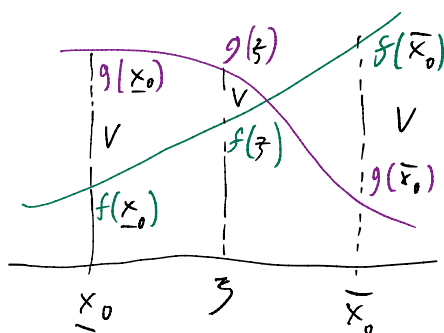
Poniamo di trovarci nel primo caso, altrimenti si procede simmetricamente. Scegliamo un numero  $\xi$  fra  $x_0$  e  $\bar{x}_0$ .

Può capitare che  $f(\xi) > g(\xi)$  oppure che  $f(\xi) < g(\xi)$ .



Prima situazione

$$f(\xi) > g(\xi)$$

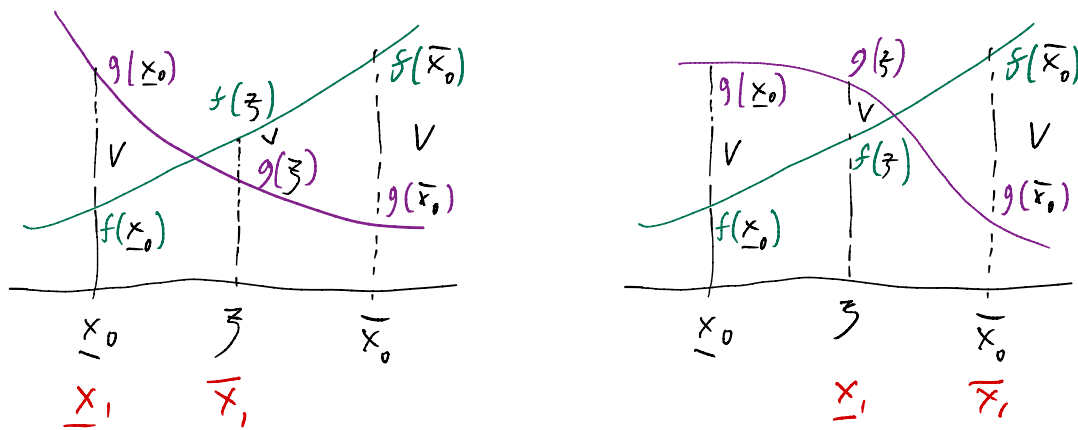


Seconda situazione

$$f(\xi) < g(\xi)$$

Una, la soluzione  $x$  è compresa fra  $x_0$  e  $\bar{x}_0$ , ma noi desideriamo intrappolarla in un intervallo più piccolo.

Nella prima situazione la soluzione  $x$  è compresa fra  $\underline{x}_0$  e  $\bar{z}$ , quindi scriviamo  $\underline{x}_1 = \underline{x}_0$ ,  $\bar{x}_1 = \bar{z}$ . Nella seconda situazione  $x$  è fra  $\bar{z}$  e  $\bar{x}_0$ , quindi scriviamo  $\underline{x}_1 = \bar{z}$  e  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0$ .



In ambo i casi abbiamo due nuovi valori;  $\underline{x}_1$  e  $\bar{x}_1$  che racchiudono la soluzione incognita  $x$  (poiché le disuguaglianze  $f(\underline{x}_1) \leq g(\underline{x}_1)$  e  $f(\bar{x}_1) \geq g(\bar{x}_1)$  sono invertite l'una rispetto all'altra).

Ripetiamo fino ad ottenere  $\underline{x}_n$  e  $\bar{x}_n$  così vicini che determinano  $x$  entro l'approssimazione desiderata.

Es. Determinare la soluzione positiva della equazione

$$x^4 - 1 = x$$

dell'esercizio precedente approssimata a tre cifre significative.

Soluzione Avvalendoci del grafico, possiamo iniziare da  $\underline{x}_0 = 1$ ,  $\bar{x}_0 = 1.4$ . Vale  $f(\underline{x}_0) = 0$ ,  $g(\underline{x}_0) = 1$ ,  $f(\bar{x}_0) \approx 2.8$ ,  $g(\bar{x}_0) = 1.4$  quindi  $f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0)$  e  $f(\bar{x}_0) > g(\bar{x}_0)$ .

Scegliamo  $\bar{z} = 1.2$  (fra  $\underline{x}_0 = 1$  e  $\bar{x}_0 = 1.4$ ).  $f(\bar{z}) \approx 1.07$ ,  $g(\bar{z}) = 1.2$ . Quindi  $f(\bar{z}) < g(\bar{z})$ . Seguendo il procedimento,  $\underline{x}_1 = \bar{z} = 1.2$ ,  $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 = 1.4$ , vale a dire che la soluzione si trova fra 1.2 e 1.4. Per il passo successivo scegliamo  $\bar{z} = 1.3$ . Otteniamo  $f(\bar{z}) \approx 1.86$ ,  $g(\bar{z}) = 1.3$ , quindi  $f(\bar{z}) > g(\bar{z})$ . Ricordando che  $f(\underline{x}_1) = f(1.2) \approx 1.07 < 1.2 = g(\underline{x}_1)$ , dobbiamo scegliere  $\underline{x}_2 = \underline{x}_1 = 1.2$ ,  $\bar{x}_2 = \bar{z} = 1.3$ .

Proseguendo così otteniamo

| $x^{k-1}$ |   | $x$    | passo 0   passo 1   passo 2   passo 3   passo 4   passo 5 |     |                   |     |                   |     |
|-----------|---|--------|-----------------------------------------------------------|-----|-------------------|-----|-------------------|-----|
| $f(x)$    |   | $g(x)$ | $x$                                                       |     |                   |     |                   |     |
| 0         | < | 1      | 1                                                         | --- | $\underline{x}_0$ |     |                   |     |
| 1.07      | < | 1.2    | 1.2                                                       | --- | $\bar{z}$         | --- | $\underline{x}_1$ | --- |
| 1.215     | < | 1.22   | 1.22                                                      | --- |                   | --- | $\underline{x}_2$ | --- |
| 1.28      | > | 1.23   | 1.23                                                      | --- |                   | --- | $\bar{z}$         | --- |
| 1.44      | > | 1.25   | 1.25                                                      | --- |                   | --- | $\bar{x}_3$       | --- |
| 1.86      | > | 1.3    | 1.3                                                       | --- | $\bar{z}$         | --- | $\bar{x}_2$       |     |
| 2.8       | > | 1.4    | 1.4                                                       | --- | $\bar{x}_0$       | --- | $\bar{x}_1$       |     |
|           |   |        |                                                           |     |                   |     | $\underline{x}_4$ | --- |
|           |   |        |                                                           |     |                   |     | $\bar{x}_5$       | --- |

Quindi la soluzione  $x$  è compresa fra  $\underline{x}_5 = 1.22$  e  $\bar{x}_5 = 1.23$ . Per capire se dobbiamo arrotondare  $x$  a 1.22 o a 1.23 calcoliamo un ultimo passo ponendo  $\bar{z} = 1.225$ . Otteniamo  $f(\bar{z}) \approx 1.25$ ,  $g(\bar{z}) = 1.225$ . Quindi  $f(\bar{z}) > g(\bar{z})$ . Ricordando che  $f(\underline{x}_5) = f(1.22) \approx 1.215$  e  $g(\underline{x}_5) = 1.22$ , vediamo che  $f(\underline{x}_5) < g(\underline{x}_5)$ , le disuguaglianze sono invertite, la soluzione è fra  $\underline{x}_5 = 1.22$  e  $\bar{z} = 1.225$ , dunque si approssima  $\boxed{x = 1.22}$ .

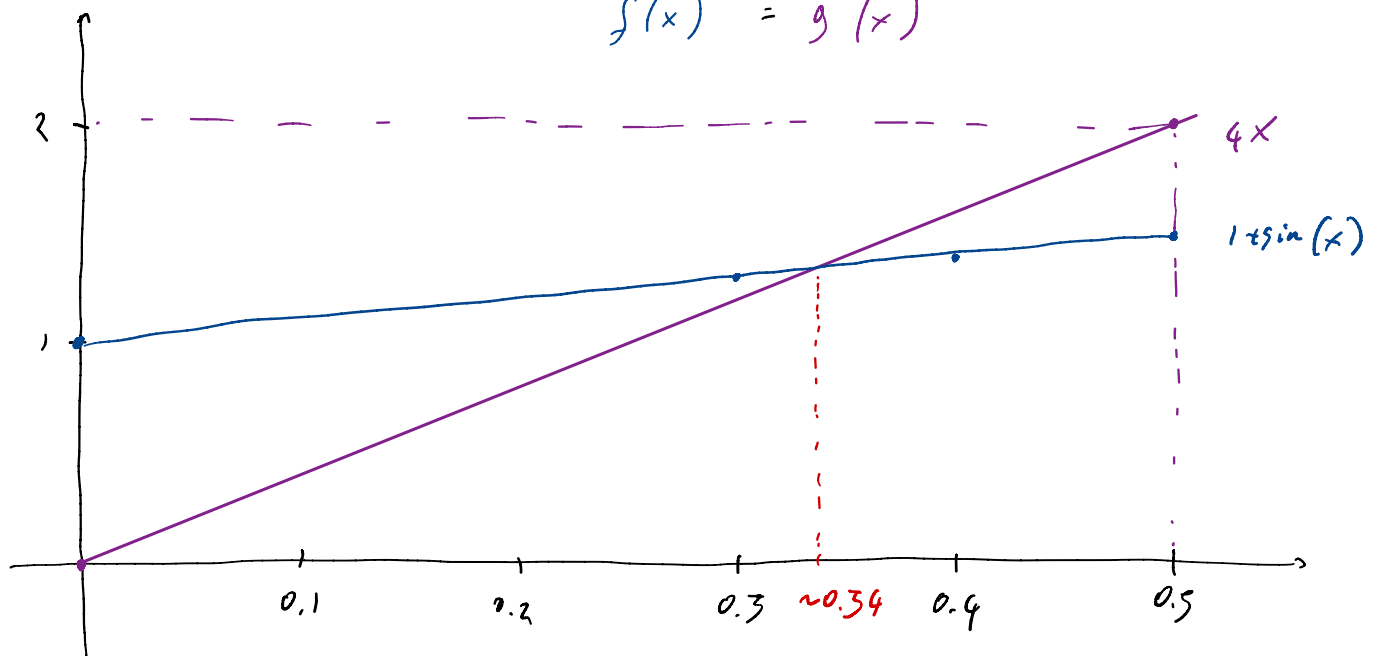
Nota: nella scelta di  $z$ , è importante che si prenda un valore compreso fra  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ , ed è conveniente sceglierlo grosso modo a metà fra  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ . Non c'è nessun obbligo, però, di prendere esattamente il valor medio  $\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$ .

Esempio risolvere l'equazione  $1 + \sin(x) = 4x$  con tre cifre significative di precisione.

Soluzione.

Siccome  $\sin(x)$  è compreso fra  $-1$  e  $1$ ,  $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ , e possiamo riscrivere l'equazione nella forma  $\sin(x) = 4x - 1$  abbiamo  $-1 \leq 4x - 1 \leq 1$ . Risolvendo le due disuguaglianze separatamente otteniamo  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Le soluzioni sono quindi obbligate a stare in questo intervallo, e sono questi i valori della  $x$  che dobbiamo studiare.

$$1 + \sin(x) = 4x$$
$$f(x) = g(x)$$



Il grafico ci dice che c'è una sola soluzione, che questa vale forse circa 0.34 e comunque è certamente compresa fra 0.3 e 0.4. Procediamo quindi come nell'esempio precedente a partire da  $\underline{x}_0 = 0.3$  e  $\bar{x}_0 = 0.4$ .

| $f(x)$ | $g(x)$  | $x$    | passo 0                                                                             | passo 1 | passo 2 | passo 3 | passo 4 | passo 5 | passo 6 |
|--------|---------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.3    | > 1.2   | 0.3    | -- $\underline{x}_0$ --- $\underline{x}_1$                                          |         |         |         |         |         |         |
| 1.324  | > 1.320 | 0.33   | ----- $\bar{x}$ ----- $\underline{x}_2$ --- $\underline{x}_3$ --- $\underline{x}_4$ |         |         |         |         |         |         |
| 1.325  | > 1.324 | 0.331  | ----- $\bar{x}$ ----- $\underline{x}_5$ --- $\underline{x}_6$                       |         |         |         |         |         |         |
| 1.325  | < 1.326 | 0.3315 | ----- $\bar{x}$ ----- $\bar{x}_6$                                                   |         |         |         |         |         |         |
| 1.326  | < 1.328 | 0.332  | ----- $\bar{x}$ ----- $\bar{x}_4$ --- $\bar{x}_5$                                   |         |         |         |         |         |         |
| 1.328  | < 1.340 | 0.335  | ----- $\bar{x}$ ----- $\bar{x}_3$                                                   |         |         |         |         |         |         |
| 1.34   | < 1.40  | 0.35   | - $\bar{x}$ - $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$                                             |         |         |         |         |         |         |
| 1.39   | < 1.6   | 0.4    | - $\bar{x}_0$                                                                       |         |         |         |         |         |         |

Siamo giunti alla conclusione che la soluzione è compresa fra 0.331 e 0.3315. Espressa con tre cifre significative correttamente arrotondate è quindi  $\boxed{x = 0.331}$

Se, per esempio, fosse risultata compresa fra 0.3315 e 0.332, allora avremmo dovuto arrotondare a  $x = 0.332$ .

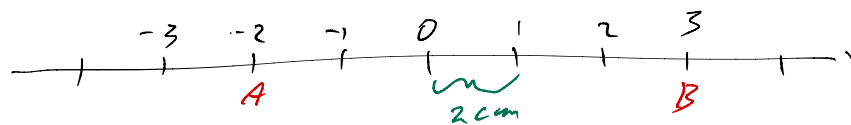
## Scale logaritmiche

L'usuale corrispondenza fra i numeri reali e i punti sugli assi di un diagramma cartesiano si chiama *scala lineare*.

Questa maniera di numerare i punti di una retta è definita dalla seguente proprietà.

Scala lineare: la distanza fra due numeri è proporzionale alla loro differenza.

Esempio:



$$\text{dist.}(A, B) : 3 - (-2) = 2 \text{ cm} : 1 - 0$$

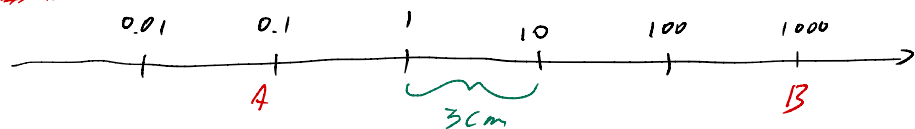
$$\text{dist}(A, B) = \frac{5 \cdot 2 \text{ cm}}{1} = 10 \text{ cm}.$$

Un'altra maniera di numerare gli assi che ha interesse pratico è la *scala logaritmica*, definita dalla proprietà seguente

*Scala logaritmica*: rappresenta solo numeri positivi, e la distanza fra due numeri è proporzionale alla differenza dei loro logaritmi (in una qualsiasi base fissata).

Tipico aspetto di una scala logaritmica

Esempio

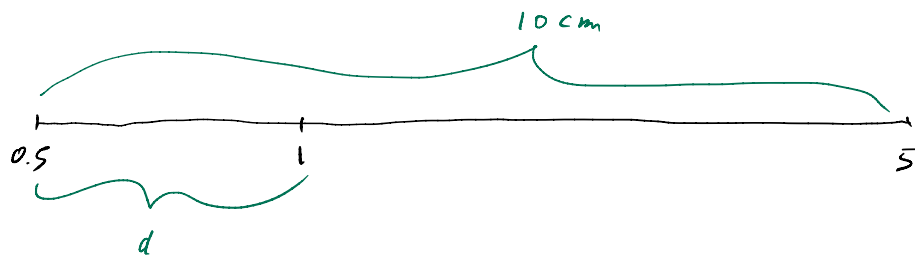


$$\text{dist}(A, B) : \log_{10}(1000) - \log_{10}(0.1) = 3 \text{ cm} : \log_{10}(10) - \log_{10}(1)$$

$$\text{dist}(A, B) = \frac{4 \cdot 3 \text{ cm}}{1} = 12 \text{ cm}$$

Es. Tracciare una scala logaritmica lunga 10 cm che, all'estremo sinistro, ha 0.5 e, a quello destro, ha 5.

Soluzione Come esempio, calcoliamo dove mettere il numero 1 (il calcolo è lo stesso qualunque numero vogliamo riportare sulla scala). Conviene determinare la distanza  $d$  del nostro numero dall'estremo sinistro.



$$d : \log_{10}(1) - \log_{10}(0.5) = 10 \text{ cm} : \log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)$$

$$\begin{aligned} \boxed{d} &= \frac{(\log_{10}(1) - \log_{10}(0.5)) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)} = \\ &= \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}\left(\frac{5}{0.5}\right)} = \frac{\log_{10}(2) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}(10)} \approx \boxed{3 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Osservazioni sull'esercizio

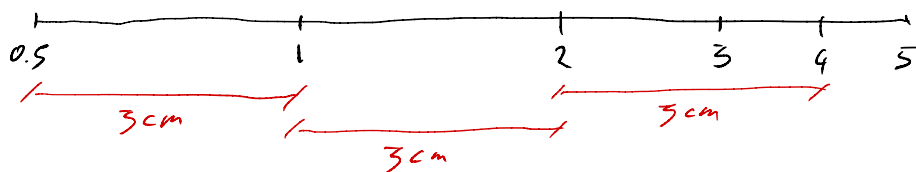
- Se ripetiamo il calcolo in un'altra base otteniamo il medesimo risultato

$$d : \log_e(1) - \log_e(0.5) = 10 \text{ cm} : \log_e(5) - \log_e(0.5)$$

$0 \quad \approx -0.693 \qquad \qquad \approx 1.609 \quad \approx -0.693$

$$d : 0.693 = 10 \text{ cm} : 2.302 \quad \Rightarrow \quad d \approx \frac{0.693 \cdot 10 \text{ cm}}{2.302} \approx 3 \text{ cm}$$

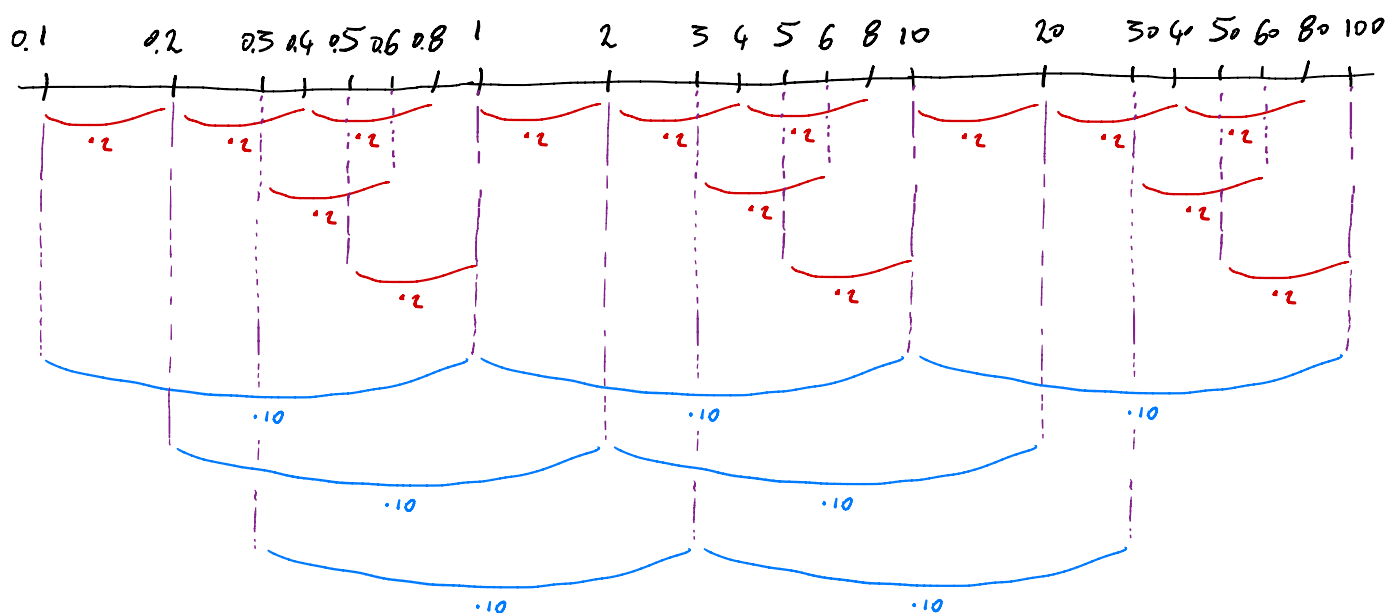
• Riportando altri numeri otteniamo



Notiamo che le distanze fra 0.5 e 1, fra 1 e 2, e fra 2 e 4 sono uguali. Questo accade perché  $\frac{1}{0.5} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ .

In generale spostarsi lungo una scala logaritmica di una certa distanza significa moltiplicare per un certo numero (che dipende dalla scala e dalla distanza). Nel nostro esempio, se ci spostiamo verso destra di 3 cm, moltiplichiamo per 2.

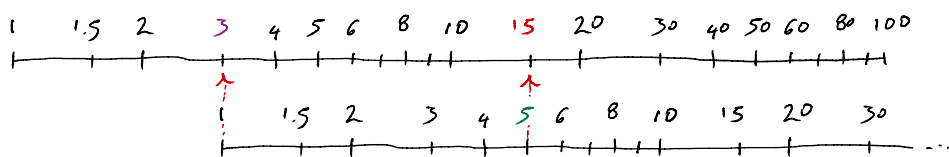
Proseguendo questa scala a destra e a sinistra otteniamo



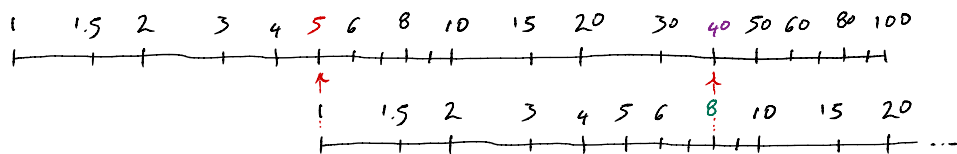
È interessante notare come il gioco di spostamento = moltiplicazione fa sì che gli ordini di grandezza 0.1-1, 1-10, 10-100, etc. siano lunghi uguali, e suddivisi in maniera simile.

## Curiosità sulle scale logaritmiche (Suoni: programma)

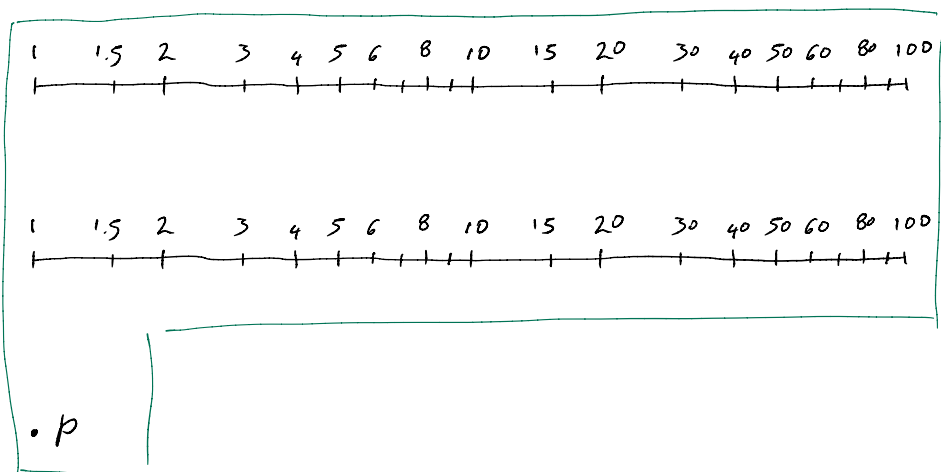
Costruiamo due scale logaritmiche uguali e mobili l'una rispetto all'altra. Supponiamo di voler calcolare un prodotto, per esempio  $3 \cdot 5$ . Poniamo l'1 della seconda scala in corrispondenza del 3 della prima, il numero della prima scala corrispondente al 5 sulla seconda sarà il prodotto.



Per calcolare una divisione, per esempio  $40/8$ , mettiamo il divisore sulla seconda in corrispondenza del dividendo sulla prima. L'1 della seconda indicherà il risultato

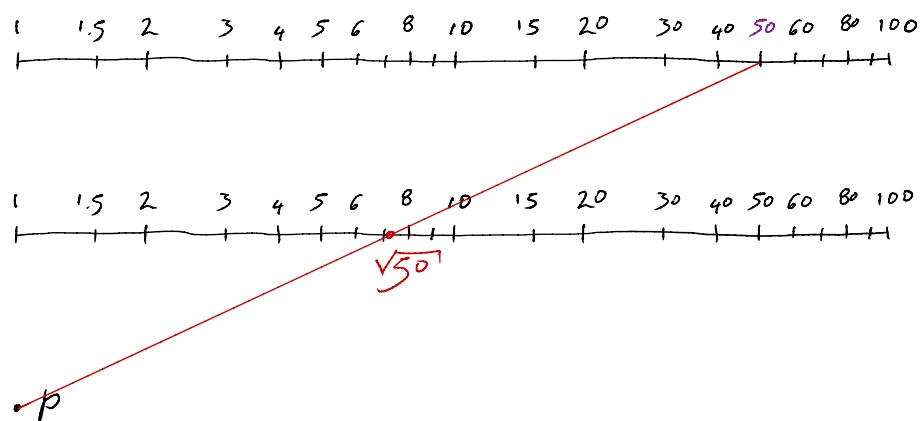


Questo diagramma permette di calcolare le radici quadrate.



Per trovare, per esempio,  $\sqrt{50}$ , riporto 50 sulla scala superiore,

poi connesso questo punto con P. Il segmento così identificato interseca la scala inferiore in  $\sqrt{50}$ .



fine 1.16