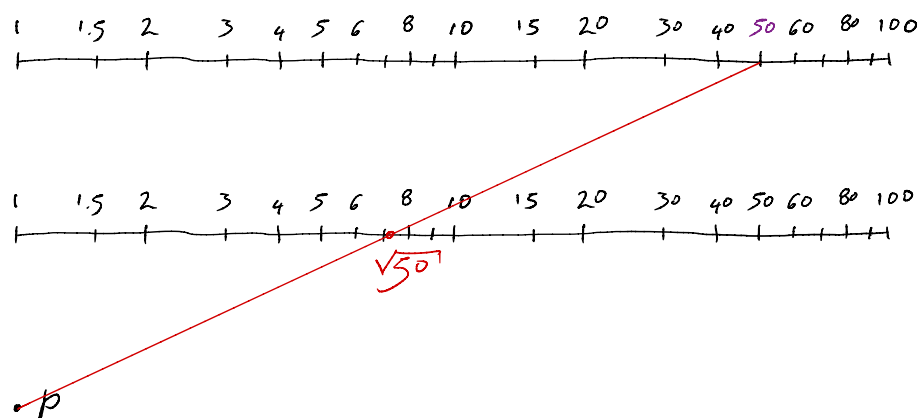


poi connesso questo punto con P. Il segmento così identificato interseca la scala inferiore in $\sqrt{50}$.



Dagli esercizi per il test (a.a. 2013-20)

(66) Sapendo $\sin(x) = 0.6$, quanto può valere $\cos(x)$?

Ricordo $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

$$(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2 = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

$$\cos(x) = \pm \sqrt{0.64} = \pm 0.8 \rightarrow \begin{cases} 0.8 \\ 0 \\ -0.8 \end{cases}$$

(67) Sapendo $\sin(x) = 0.6$, quanto può valere $\tan(x)$?

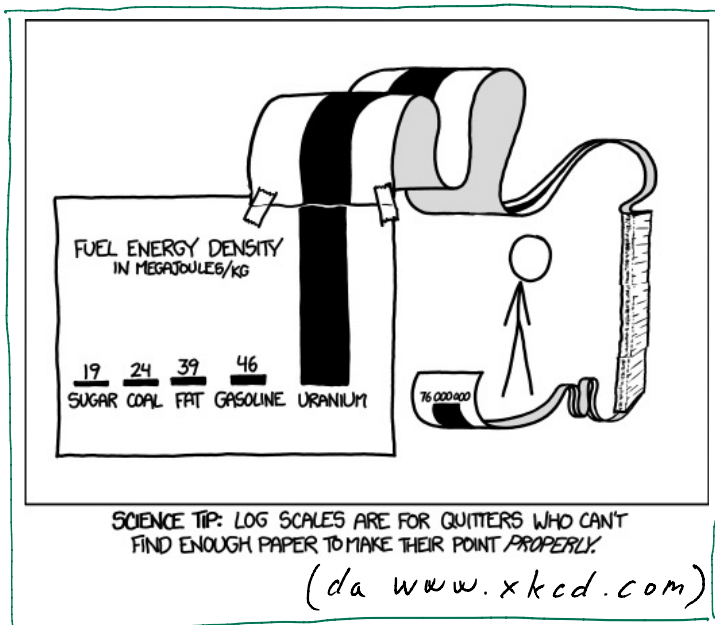
$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{0.6}{\pm 0.8} \rightarrow \begin{cases} +0.75 \\ 0 \\ -0.75 \end{cases}$$

per definizione

(68) Per che x , $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ non è definita?

Basta risolvere denominatore = 0

$$e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \log_e 1 \rightarrow \boxed{x = 0}$$



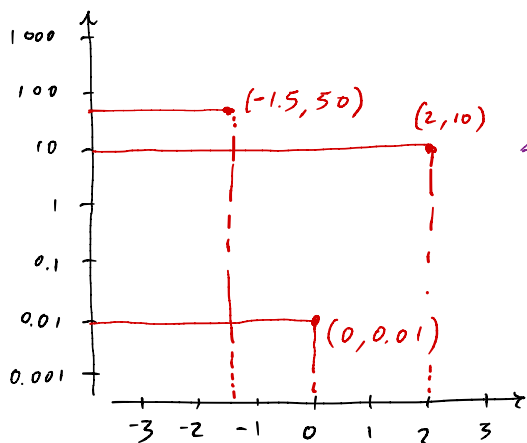
A cosa servono
le scale
logaritmiche?

Una scala logaritmica
permette solo di rap-
presentare quantità

positive. In generale, è conveniente usare una
scala logaritmica per quantità che variano su
più ordini di grandezza. I grafici logaritmici
sono particolarmente utili in quanto evidenzia-
no certe leggi (o funzioni) che si incontrano
di frequente (esponenziali, potenze).

Grafici semi-logaritmici (o lin-log)

Un grafico semi-logaritmico (o lin-log) si
distingue dagli usuali grafici cartesiani poiché
l'asse delle ordinate (questo) è graduato in
scala logaritmica. I punti si identificano
su un grafico logaritmico mediante l'interse-
zione di due linee coordinate, esattamente
nello stesso modo dei grafici cartesiani.

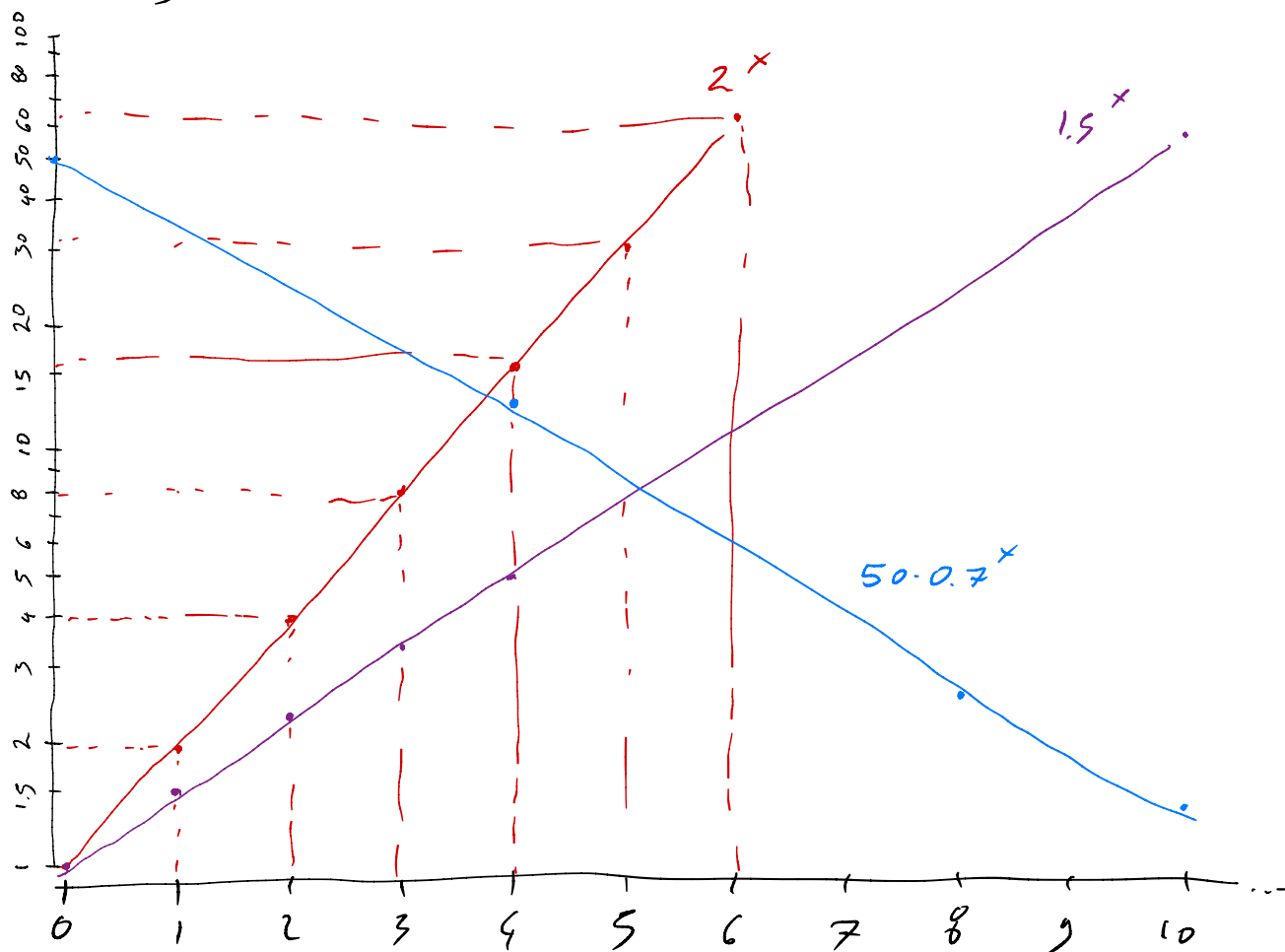


Alcuni punti rappresentati su un grafico semi-logaritmico.

Da notare che l'asse delle ordinate riporta solo valori positivi. L'asse delle ascisse,

invece, può anche rappresentare numeri negativi.

I grafici semi-logaritmici sono importanti per riconoscere le funzioni esponenziali. Infatti un grafico appare rettilineo se e solo se rappresenta un esponenziale.



Da grafico semi-logaritmico a espressione

La forma generale di una funzione esponenziale è $f(x) = a \cdot b^x$. Alternativamente, si può fissare una base convenzionale, per esempio 10, oppure e , e scrivere $f(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$, oppure $f(x) = a \cdot e^{h \cdot x}$.

Ogni funzione esponenziale di variabile reale può essere espressa in ciascuna di queste forme, per esempio.

$$\underbrace{0.7}_a \cdot \underbrace{3}_b^x = \underbrace{0.7}_a \cdot 10^{\overbrace{\log_{10} 3}^k \cdot x} = \underbrace{0.7}_a \cdot e^{\overbrace{\log_e 3}^h \cdot x}$$

Però, conviene fissare una base convenzionale quando la variabile non è adimensionale. Per esempio, la funzione $f(t) = 4.0 \cdot 10^{\frac{t}{45}}$, della variabile t che ha le dimensioni di un tempo, non si può scrivere nella forma $f(t) = 4.0 \cdot b^t$, perché non ha senso elevare a a un tempo (quanto fa 2^{2h} ? e $2^{120 \text{ min}}$?). Questa funzione si può però scrivere nelle forme equivalenti:

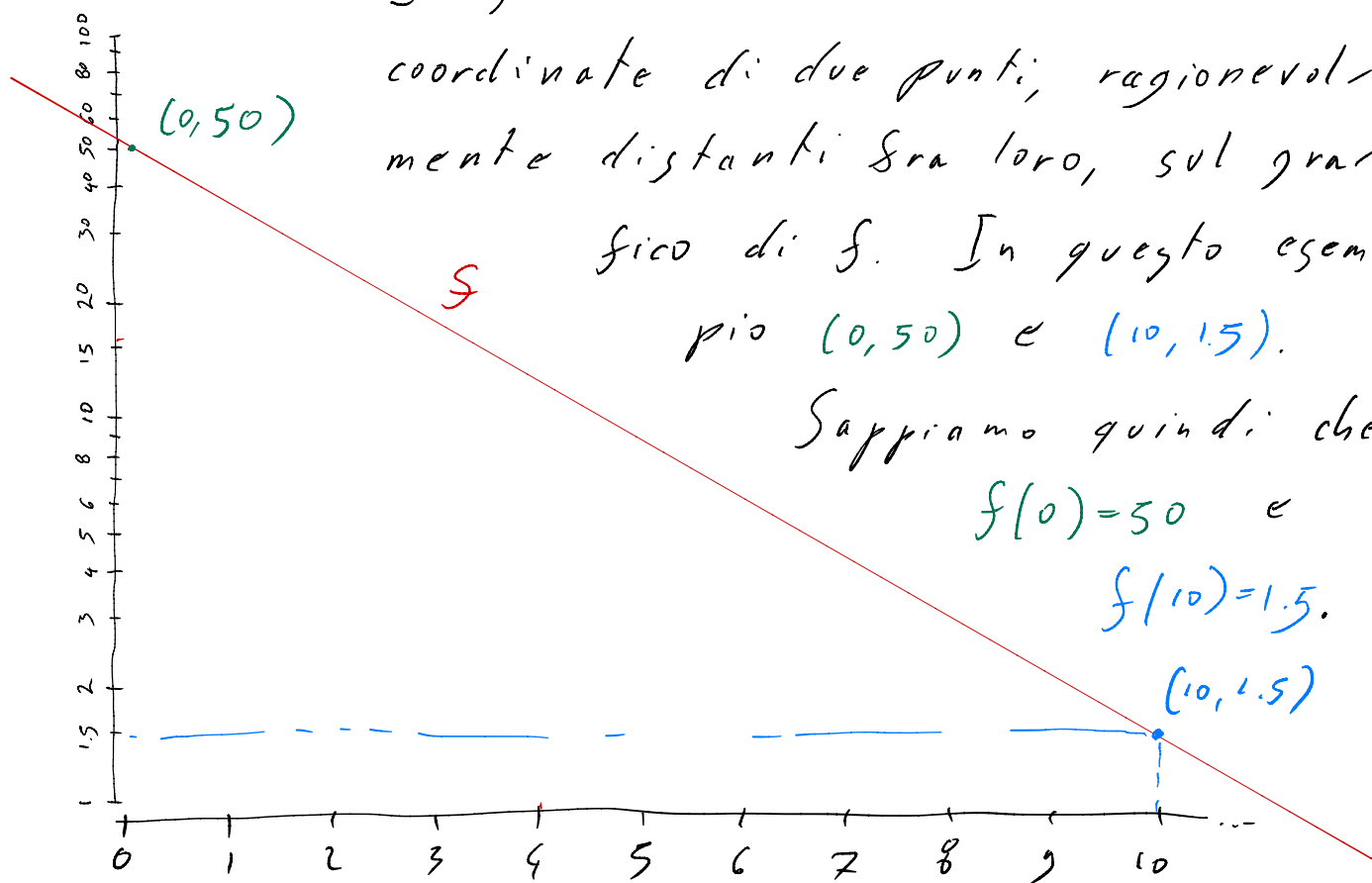
$$f(t) = 4.0 \cdot 10^{t \cdot 0.25 \text{ s}^{-1}} = 4.0 \cdot e^{t \cdot 0.25 \cdot \log_e(10) \text{ s}^{-1}} = 10^{\log_{10}(4.0) + \frac{15}{1 \cdot \text{min}} t}$$

Esercizio: verifica tutte le formule di questa pagina.

Ora, supponiamo di constatare che il grafico di una certa funzione f , in un diagramma semi-logaritmico, è una retta. Sappiamo quindi che f è una funzione esponenziale. Come troviamo l'espressione di $f(x)$?

Iniziamo coll'identificare le coordinate di due punti, ragionevolmente distanti fra loro, sul grafico di f . In questo esempio $(0, 50)$ e $(10, 1.5)$.

Sappiamo quindi che $f(0) = 50$ e $f(10) = 1.5$.



Volendo scrivere f nella forma $f(x) = a \cdot b^x$ vediamo che $f(0) = a \cdot b^0 = 50$ e $f(10) = a \cdot b^{10} = 1.5$. Quindi i parametri a e b soddisfanno il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \end{cases}$$

Risolvi il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \Rightarrow a = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot b^{10} = 1.5 \Rightarrow 50 \cdot b^{10} = 1.5 \Rightarrow b = \left(\frac{1.5}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \approx 0.70 \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = 50 \cdot 0.70^x$$

Altro esempio: cerchiamo una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(2.5) = 7.6$ e $g(4.0) = 12.0$. Questa volta, usiamo la forma $g(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a \cdot 10^{k \cdot 2.5} = 7.6 \Rightarrow a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \\ a \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \Rightarrow \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \Rightarrow \end{cases}$$

$10^{k \cdot 4.0 - k \cdot 2.5} = 10^{k \cdot 1.5}$

$$\Rightarrow 7.6 \cdot 10^{k \cdot 1.5} = 12.0 \Rightarrow 10^{k \cdot 1.5} = \frac{12.0}{7.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot 1.5 = \log_{10} \frac{12.0}{7.6} \Rightarrow k = 0.132$$

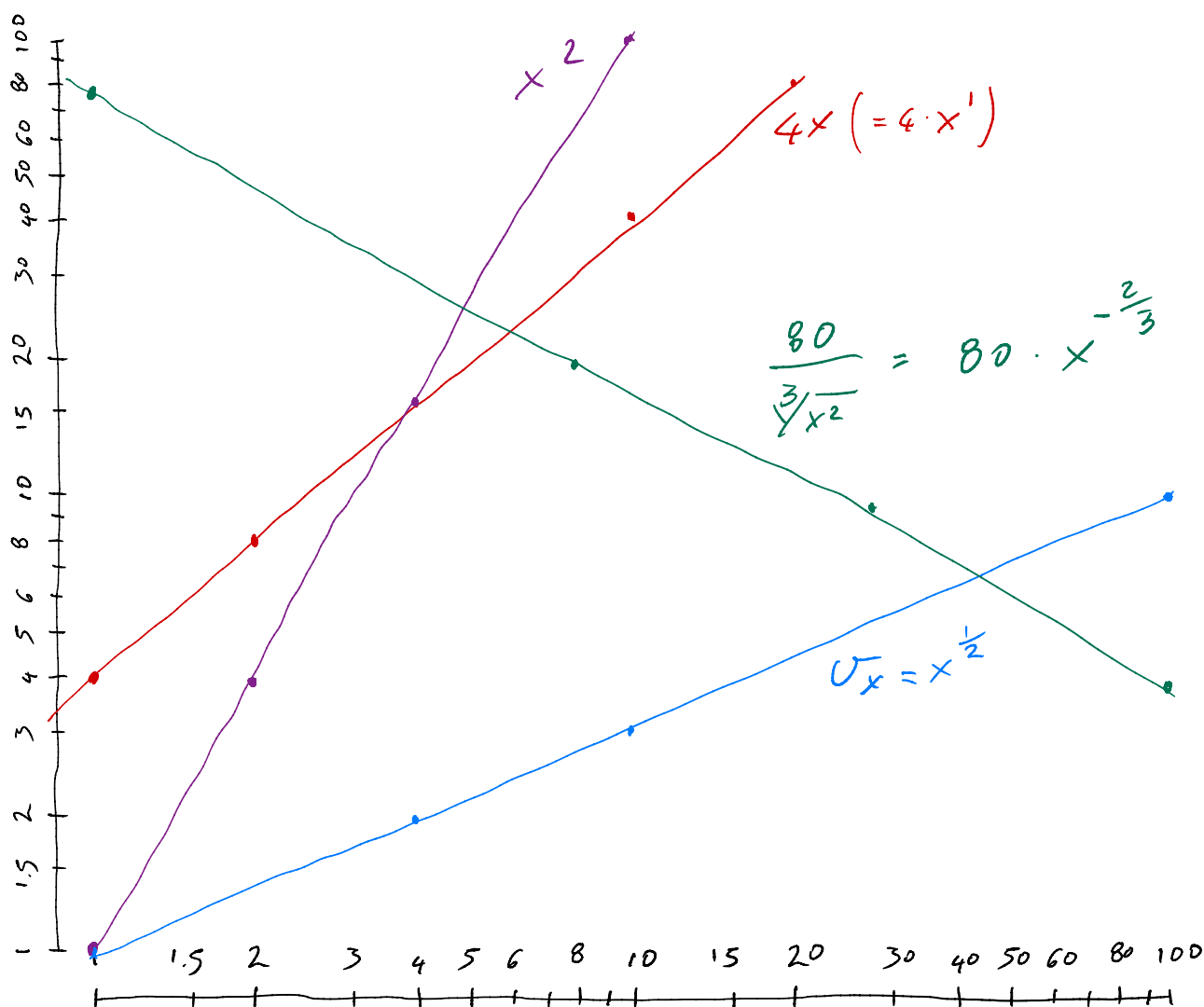
$$a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} = 3.5$$

Quindi: $f(x) = 3.5 \cdot 10^{0.132 \cdot x}$

Grafici logaritmici (o log-log)

In un grafico logaritmico entrambi gli assi sono in scala logaritmica (va da sé, quindi, che entrambi rappresentano solo numeri positivi).

Questi grafici permettono di riconoscere visivamente le funzioni potenza, ossia quelle della forma $f(x) = a \cdot x^k$ (con k che potrebbe anche non essere un numero intero). Per esempio



Dal grafico logaritmico all'espressione

Il procedimento per ottenere l'espressione di una legge potenza $f(x)$ dal suo grafico è analogo a quello descritto per l'esponenziale.

Esempio. Supponiamo di osservare che una funzione $f(x)$ è rappresentata in un grafico logaritmico da una retta. Sappiamo quindi che $f(x) = a \cdot x^k$ per opportuni a e k . Vediamo anche dal grafico che $f(2.1) = 10$ e $f(30) = 3.7$. Qual è l'espressione di f ?

$$\begin{cases} a \cdot 2.1^k = 10 \\ a \cdot 30^k = 3.7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{2.1^k} \\ \Downarrow \\ \frac{10}{2.1^k} \cdot 30^k = 3.7 \Rightarrow \left(\frac{30}{2.1}\right)^k = \frac{3.7}{10} \Rightarrow \end{cases}$$

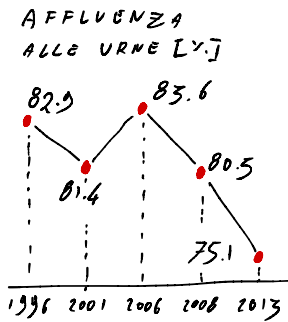
$$\Rightarrow \boxed{k} = \log_{\frac{30}{2.1}} \left(\frac{3.7}{10} \right) = \frac{\log_{10} \frac{3.7}{10}}{\log_{10} \frac{30}{2.1}} \approx \boxed{-0.37}$$

$$\boxed{a} = \frac{10}{2.1^k} = \frac{10}{2.1^{-0.37}} \approx \boxed{13} \quad \text{Quindi } \boxed{f(x) = 13 \cdot x^{-0.37}}$$

Nota importante: Al termine di calcoli come questo conviene sempre fare la prova calcolando f nei punti dati. $f(2.1) = 13 \cdot 2.1^{-0.37} = 9.88 \approx \underline{10} \quad \checkmark$

$$f(30) = 13 \cdot 30^{-0.37} = 3.69 \approx \underline{3.7} \quad \checkmark$$

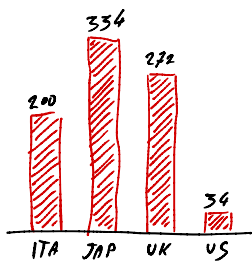
Altri grafici usati in pratica



Grafici a spezzata per rappresentare serie temporali di dati, soprattutto quando la variazione nel tempo non è continua. Per esempio l'affluenza alle

urne è ben definita solo quando si svolgono delle elezioni (per contro, ad esempio, l'altezza della marea nel porto di Genova è una variabile continua).

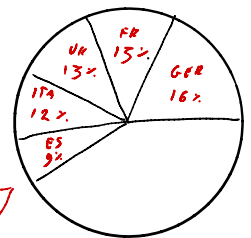
DENSITA' DI
POPOLAZIONE [km⁻²]



Istogrammi per rappresentare collezioni di dati che non formano una sequenza, per cui sono ordinati in un ordine arbitrario o convenzionale.

Areogrammi (grafici a torta) per rappresentare la suddivisione di un totale nelle sue parti:

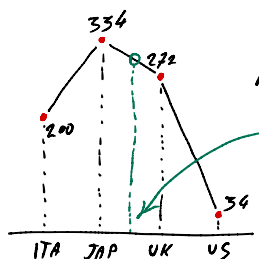
POPOLAZIONE
DELLA UE



$$\boxed{\text{angolo} : 360^\circ = \text{percentuale} : 100}$$

Infamità

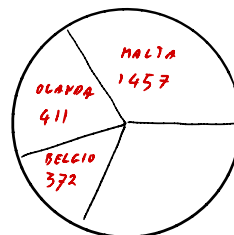
⇒ DA NON FARE MAI ⇐



DENSITA' DI
POPOLAZIONE [km⁻²]

Cosa c'è qui?
La Russia?

DENSITA' DI POPOLAZIONE NELLA UE [km⁻²]



Ok, la densità totale è 118 km⁻²,
Malta 1457 è il 1235% del totale?

fino l. 17

