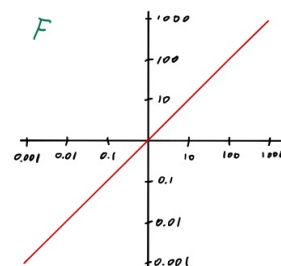
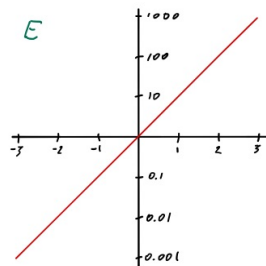
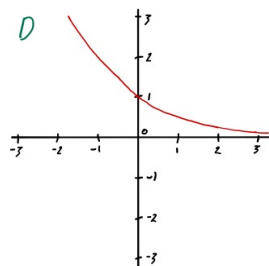
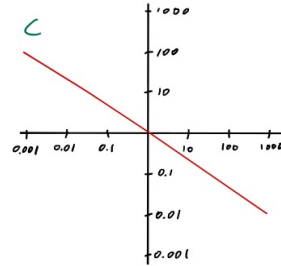
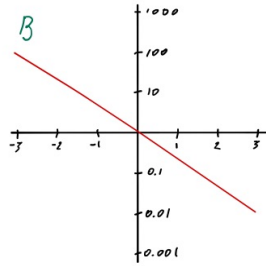
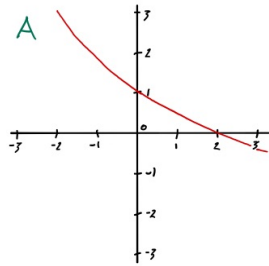


ESERCIZIO B (prova online dal 28.V.2020)

Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale (3pt), e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento (3pt). In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.



Soluzioni

A - **NO** perché assume anche valori negativi

B - **SÌ** retta su grafico semi-log $\rightarrow$ esponenziale + decrescente

C - **NO** retta su grafico log-log $\rightarrow$ potenza

D - **SÌ** o almeno non c'è ragione di escluderlo

NON È UN
DECADIMENTO

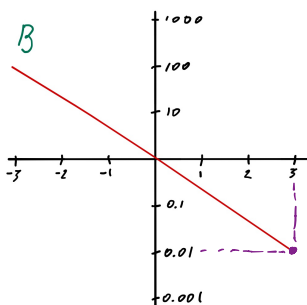
E - **NO** retta su grafico semi-log $\rightarrow$ esponenziale ma crescente

F - **NO** retta su grafico log-log $\rightarrow$ potenza inoltre crescente

Per i tempi di dimezzamento:

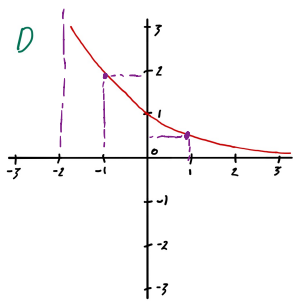
t. di dimezzamento

$$f(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}$$



$$\begin{cases} f(0s) = 1 \Rightarrow A = 1 \\ f(3s) = 0.001 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3s}{\tau}} = 0.001 \Rightarrow \tau = \frac{3s}{\log_2 0.001} \approx \boxed{0.45s} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{3s}{\log_2 0.001} \approx \boxed{0.45s}$$

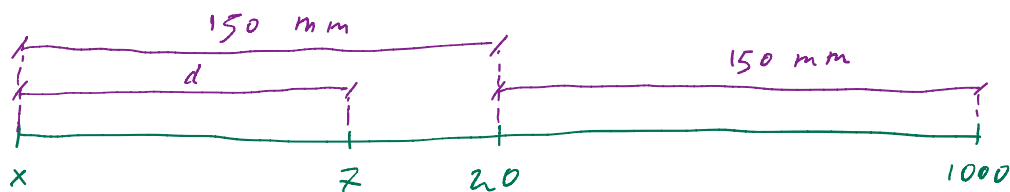


Dal grafico $f(-1) \approx 2$, $f(0) \approx 1$, $f(1) \approx \frac{1}{2}$
 Quindi il valore di f si dimezza grosso modo
 nel tempo di 15.

ESERCIZIO B (prova online del 24.VI.2020)

Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala (3 pt.)? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7 (3 pt.)?

La situazione è come rappresentata in figura



l'esercizio chiede il numero x e la distanza d .

Per x abbiamo la seguente proporzione

$$\log_{10}(1000) - \log_{10}(20) : 150 \text{ mm} = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

Da cui calcoliamo

$$\underbrace{(\log_{10}(1000) - \log_{10}(20))}_{\log_{10} \frac{1000}{20}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}} = \underbrace{(\log_{10}(20) - \log_{10}(x))}_{\log_{10} \frac{20}{x}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}}$$

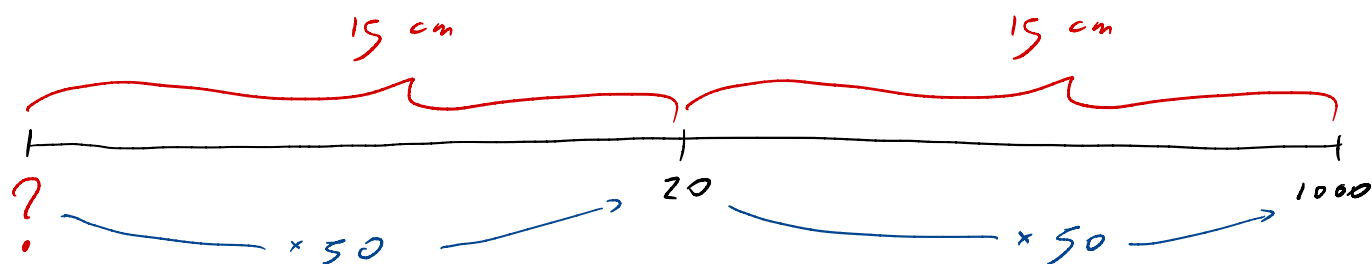
$$\log_{10} \frac{1000}{20} = \log_{10} \frac{20}{x} \Rightarrow \frac{1000}{20} = \frac{20}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20 \cdot 20}{1000} = 0.4}$$

Per d abbiamo

$$\log_{10}(7) - \log_{10}(x) : d = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

$$\boxed{d} = \frac{\log_{10}(7) - \log_{10}(0.4)}{\log_{10}(20) - \log_{10}(0.4)} \cdot 150 \text{ mm} \approx \boxed{110 \text{ mm}}$$

Un ragionamento più rapido, che però permette di rispondere solo alla prima domanda, è come segue



Siccome lo spostamento di 15 cm che porta dal 20 centrale al 1000 all'estremo destro corrisponde ad una moltiplicazione per 50, l'identico spostamento che porta dall'estremo sinistro al centro deve corrispondere ad una moltiplicazione per lo stesso fattore. A sinistra abbiamo quindi

$$? = \frac{\text{valore centrale}}{50} = \frac{20}{50} = \boxed{0.4}$$

Dalle note dell'a.a. 2014-20

ESERCIZIO A (esame del 31.1.2019)

- A.1 – Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
- A.2 – Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0 da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
- A.3 – Se il numero iniziale di individui alla domanda A.2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Soluzione

A.1 - Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?

Facciamo i calcoli per il 200 000, gli altri casi sono analoghi. Chiamiamo d la distanza fra il punto che rappresenta 100 000 e quello del 200 000.

Abbiamo la proporzione

$$d : \underbrace{\log_{10} 200\,000 - \log_{10} 100\,000}_{\substack{2 \cdot 10^5 \\ 10^5}} = 10 \text{ cm} : \underbrace{\log_{10} 10\,000\,000 - \log_{10} 100\,000}_{\substack{10^7 \\ 10^5}}$$
$$\log_{10} \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} = \log_{10} 2$$
$$d = \frac{(\log_{10} 2) \cdot 10 \text{ cm}}{2} \approx 1.5 \text{ cm}$$

Ripetendo calcoli analoghi per gli altri dati otteniamo

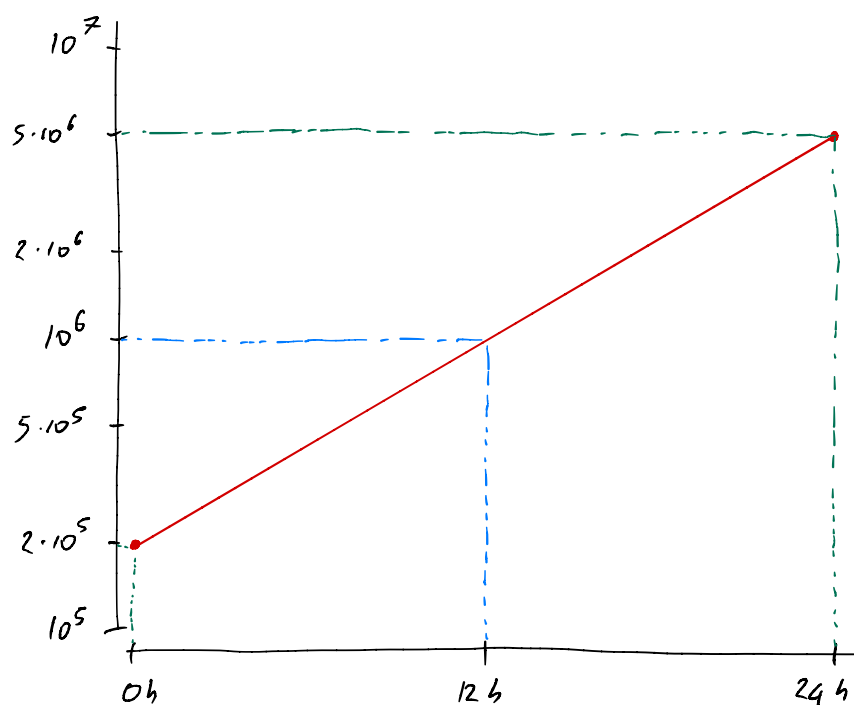
<u>valore</u>	<u>distanza</u>
1 000 000	$\frac{\log_{10}(10) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$
5 000 000	$\frac{\log_{10}(50) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 8.5 \text{ cm}$
200 000	$\frac{\log_{10}(2) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 1.5 \text{ cm}$

Nota: in queste situazioni sentitevi liberi di scrivere "ripetendo calcoli analoghi". Un esercizio di matematica

non deve essere un esercizio di bella scrittura.

A.2 - Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0 da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?

Sappiamo dalla teoria che questo grafico è una retta. Basta quindi impostare il diagramma (per esempio sfruttando la scala logaritmica del punto A.1), individuare i punti $(0, 200000)$ e $(24h, 5000000)$, quindi connetterli con un segmento di retta.



Non è difficile stimare, leggendo il grafico, che a 12h ci sono 10^6 individui. Per ottenere questo risultato analiticamente, determiniamo i parametri della funzione

esponenziale $\text{individui} = a \cdot 10^{k \cdot \text{tempo}}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^5 = a \cdot 10^{k \cdot 0h} \\ 5 \cdot 10^6 = a \cdot 10^{k \cdot 24h} \end{cases} \Rightarrow a = 2 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{k \cdot 24h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{K \cdot 24h} = 25 \Rightarrow K = \frac{\log_{10} 25}{24} h^{-1}$$

Sostituendo ora tempo = 12 h

$$\text{indiv} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\left[\frac{\log_{10} 25}{24} \cdot 12h \right]} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\frac{\log_{10} 25}{2}} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 = 10^6$$

Annotations: $\log_{10} 25 = 2 \log_{10} 5$, $\log_{10} \sqrt{25} = \log_{10} 5$, $10^{\log_{10} 5} = 5$

Nota: in una soluzione scritta per l'esame, i calcoli in viola non sono necessari. Qui li aggiungo per maggior chiarezza.

A.3 - Se il numero iniziale di individui alla domanda A.2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Dobbiamo risolvere il punto A2 con $n_1 = 200\,000 \pm 10\,000$ individui al tempo 0 e $n_2 = 5\,000\,000 \pm 250\,000$ individui al tempo 24h. Vogliamo quindi calcolare il massimo e il minimo risultato possibile al variare dei dati nei loro intervalli di incertezza. Dobbiamo considerare quattro casi:

Caso - - : $n_1 = 200\,000 - 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 - 250\,000$

Caso - + : $n_1 = 200\,000 - 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 + 250\,000$

Caso + - : $n_1 = 200\,000 + 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 - 250\,000$

Caso + + : $n_1 = 200\,000 + 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 + 250\,000$

Possiamo ripetere i calcoli in ciascun caso, oppure anche eseguirli in forma letterale per ottenere una formula che valuteremo in ciascun caso. Seguiamo la seconda strada.

$$\begin{cases} n_1 = a \cdot 10^{K \cdot 0h} \\ n_2 = a \cdot 10^{K \cdot 24h} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = n_1 \\ \Downarrow \\ n_2 = n_1 \cdot 10^{K \cdot 24h} \end{matrix} \Rightarrow K = \frac{\log_{10} \frac{n_2}{n_1}}{24h}$$

$$\text{individui} = a \cdot 10^{K \cdot 12h} = n_1 \cdot 10^{\frac{\log_{10} \frac{n_2}{n_1}}{24h} \cdot 12h} = n_1 \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{0.5} = \underline{\underline{\sqrt{n_1 n_2}}}$$

Quindi:

	n_1	n_2	indiv. = $\sqrt{n_1 n_2}$
Caso - -	$1.9 \cdot 10^5$	$4.75 \cdot 10^6$	$0.95 \cdot 10^6 \leftarrow \text{min}$
Caso - +	$1.9 \cdot 10^5$	$5.25 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
Caso + -	$2.1 \cdot 10^5$	$4.75 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
Caso + +	$2.1 \cdot 10^5$	$5.25 \cdot 10^6$	$1.05 \cdot 10^6 \leftarrow \text{max}$

$$\text{L'errore assoluto è } \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = \frac{1.05 \cdot 10^6 - 0.95 \cdot 10^6}{2} = 0.05 \cdot 10^6$$

$$\boxed{\text{individui} = (1.00 \pm 0.05) \cdot 10^6}$$

Nota: i dati sono forniti con l'errore assoluto, per cui è ragionevole indicare il risultato nella medesima maniera.

Altro metodo

$$\begin{aligned}\text{individui} &= \sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{(2.0 \pm 0.1) \cdot 10^5 (5.0 \pm 0.25) \cdot 10^6} \\&= \sqrt{(2.0 \pm 5\%) \cdot 10^5 (5.0 \pm 5\%) \cdot 10^6} = \\&= \sqrt{(10 \pm 10\%) 10^{11}} = \sqrt{(1 \pm 10\%) \cdot 10^{12}} \\&= 10^6 \cdot \sqrt{1 \pm 10\%}\end{aligned}$$

Adesso ci sono due modi per valutare $\sqrt{1 \pm 10\%}$.
Uno è sfruttare la formula seguente (che però non abbiamo visto a lezione).

$$(x \pm \alpha\%)^k = x^k \pm k \cdot \alpha\%$$

Da cui $\sqrt{1 \pm 10\%} = (1 \pm 10\%)^{0.5} = 1^{0.5} \pm 0.5 \cdot 10\% = 1 \pm 5\%$.

L'altro modo è fare massimo e minimo, però ora ci sono solo due casi da considerare anziché quattro. Ad ogni modo

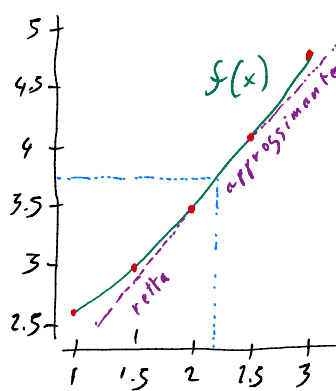
$$\boxed{\text{individui}} = 10^6 \cdot \sqrt{1 \pm 10\%} = (1 \pm 5\%) \cdot 10^6 = \boxed{(1.00 \pm 0.05) \cdot 10^6}$$

Tabella & interpolazione lineare

Può capitare che una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, liscia, regolare, &c. ci sia data solo sotto forma di tabella. Per esempio

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.6	3.0	3.5	4.1	4.8

In questo caso come possiamo ottenere una stima dei valori non tabulati, ad esempio $f(2.2)$?



Facciamo finta che fra i due valori tabulati più vicini a quello che ci interessa, 2.2, la funzione sia lineare. Non lo è, ma non può discostarsi troppo, se la tabella è costruita bene. In questo caso i due valori sono 2.0 e 2.5. Se la funzione fosse lineare avremmo $f(2.0) = 3.5$, $f(2.5) = 4.1$, e, usando la formula della retta per due punti: $f(x) = 1.1 + x \cdot 1.2$. Sostituendo $f(2.2) = 3.74 \approx 3.7$.

(Nota. Se questo è il risultato del nostro calcolo scriveremo 3.7 con due cifre significative, perché la tabella è data con due cifre significative.

Se però si tratta di un passaggio intermedio con
verrà

mantenere 3.74, e approssimare alla fine.)

In definitiva, se vogliamo interpolare $f(x)$ con x fra x_0 e x_1 , e abbiamo i valori tabulati $f(x_0)=y_0$ e $f(x_1)=y_1$, allora:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

Facendo riferimento alla tabella precedente, sapendo $f(x)=3.1$, quanto vale x ? Dovremo interpolare fra $f(\overset{x_0}{1.5})=\overset{y_0}{3.0}$ e $f(\overset{x_1}{2.0})=\overset{y_1}{3.5}$.

Primo metodo: risolviamo $3.1 = (x - 1.5) \cdot \frac{3.5 - 3.0}{2.0 - 1.5} + 3.0$

$\underset{f(x)}{3.1} = \underset{x_0}{x - 1.5} \cdot \frac{\underset{y_1}{3.5} - \underset{y_0}{3.0}}{\underset{x_1}{2.0} - \underset{x_0}{1.5}} + \underset{y_0}{3.0}$

$3.1 = x + 1.5 \quad \boxed{x = 1.6}$

Secondo metodo: usiamo la formula scambiando x e y .

$$x = (f(x) - y_0) \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + x_0$$

$$\boxed{x} = (3.1 - 3.0) \frac{2.0 - 1.5}{3.5 - 3.0} + 1.5 = \boxed{1.6}$$

$\underset{f(x)}{3.1} \quad \underset{y_0}{3.0} \quad \underset{y_1}{3.5} - \underset{y_0}{3.0} \quad \underset{x_0}{1.5}$

Giustificazione della formula. Risolviamo il sistema di equazioni per calcolare l'equazione della retta passante per (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \Rightarrow b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \Rightarrow ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \Rightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

$$\boxed{f(x)} = ax + b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§ 1. 18