

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \Rightarrow b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \Rightarrow ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \Rightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

$$f(x) = ax + b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§ 1.18

Raccolta di esercizi dalle note dell'a.a. 2013-20

ESERCIZIO B Esame del 23.V.2019

La quantità di batteri nella coltura X raddoppia ogni diciotto ore. La quantità di batteri nella coltura Y raddoppia ogni ventiquattro ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

B.1 – Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di individui? Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

Indichiamo con $X(t)$ e $Y(t)$ rispettivamente il numero di individui nelle colture X e Y al tempo t . Dai dati del problema

$$\underline{X(t) = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{18h}}} \quad \underline{Y(t) = Y_0 \cdot 2^{\frac{t}{24h}}} \quad \underline{X(0) = \frac{1}{10} Y(0)}$$

E, chiaramente $X(0) = X_0 \cdot 2^{\frac{0}{18h}} = X_0$, $Y(0) = \dots = Y_0$ quindi la terza equazione equivale a $X_0 = \frac{1}{10} Y_0$.

- Dopo quanto tempo le colture hanno il medesimo numero di individui? Vale a dire: per che

t_* si ha $X(t_*) = Y(t_*)$?

$$X(t_*) = Y(t_*) \Rightarrow X_0 \cdot 2^{\frac{t_*}{18h}} = Y_0 \cdot 2^{\frac{t_*}{24h}} \Rightarrow \frac{1}{10} \cancel{2^{\frac{t_*}{18h}}} = \cancel{2^{\frac{t_*}{24h}}} \cdot 2^{\frac{t_*}{24h}}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{2^{\frac{t_*}{24h}}}{2^{\frac{t_*}{18h}}} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2^{\frac{t_*}{24h} - \frac{t_*}{18h}} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2^{\frac{-t_*}{72h}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_*} = -72 \cdot \log_2\left(\frac{1}{10}\right) h = \boxed{72 \cdot \log_2(10) h} = \frac{72 h}{\log_{10} 2} \boxed{\approx 240 h}$$

quello della domanda precedente

- Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

Vale a dire: quanto vale $\frac{X(t_*)}{X(0)}$?

$$\boxed{\frac{X(t_*)}{X(0)}} = \frac{\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t_*}{18h}}}{\cancel{X_0}} = 2^{\frac{72 \cdot \log_2(10) h}{18h}} = 2^{4 \log_2(10)} = \boxed{10^4}$$

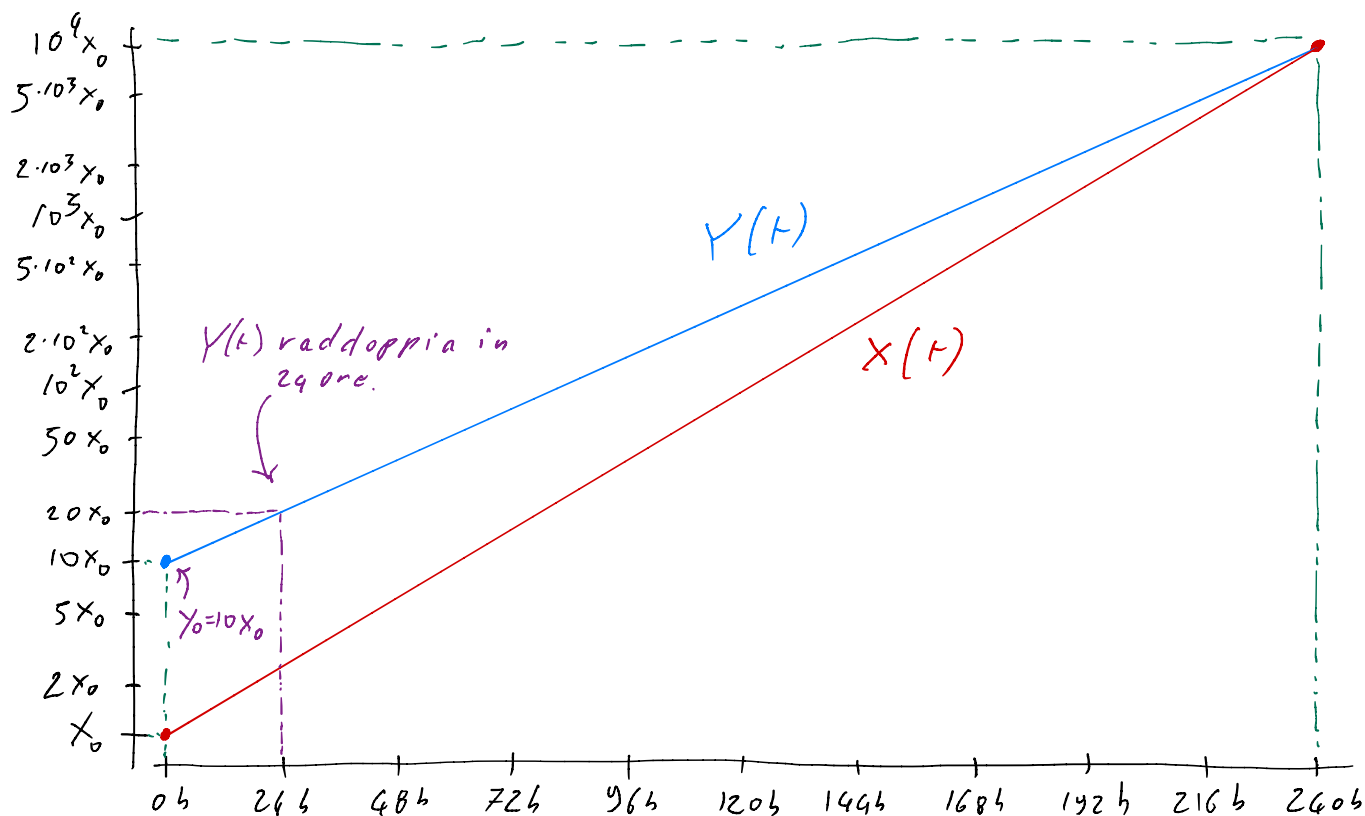
Altro modo

$$\boxed{\frac{X(t_*)}{X(0)}} \approx \frac{X(240 h)}{X(0)} = \frac{\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{240 h}{18h}}}{\cancel{X_0}} = 2^{13.33} \boxed{\approx 10000}$$

B.2 - Traccia, scegliendo una rappresentazione grafica adeguata e motivando la tua scelta, l'andamento del numero di individui nelle due colture fra l'istante iniziale e il tempo calcolato al punto precedente.

Trattandosi di funzioni esponenziali, useremo un grafico semilogaritmico. Siccome sappiamo dalla teoria che il grafico di una funzione esponenziale, su un diagramma semilogaritmico, è una retta, basterà calcolare il punto all'inizio e alla fine di ciascun grafico. Bisogna, tuttavia, graduare gli assi. L'asse delle ascisse è semplicemente una scala lineare che va da 0 a t_* (240h, calcolato al punto precedente). Per quanto riguarda l'asse delle ordinate, $X(t)$ cresce da X_0 a $X(t_*) = 10^4 X_0$, mentre $Y(t)$ cresce da $Y_0 = 10 X_0$ a $Y(t_*) = X(t_*)$. Per cui conviene che la scala vada da X_0 a $10^4 X_0$. Se decidiamo, per esempio, che questa scala deve essere lunga 12 cm, possiamo calcolare la posizione dei valori intermedi mediante l'usuale proporzione. Per esempio, detta d la distanza fra X_0 e $10 X_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} d: \underbrace{\log_{10}(10 X_0) - \log_{10}(X_0)}_{1 + \log_{10}(X_0)} &= 12 \text{ cm} : \underbrace{\log_{10}(10^4 X_0) - \log_{10}(X_0)}_{4 + \log_{10}(X_0)} \\ \underbrace{1}_{1} & \qquad \qquad \qquad \underbrace{4}_{4} \\ d: 1 &= 12 \text{ cm} : 4 \Rightarrow \underline{d = 3 \text{ cm}} \end{aligned}$$



Nota: la scelta di un grafico cartesiano sarebbe stata meno saggia. Proviamo...

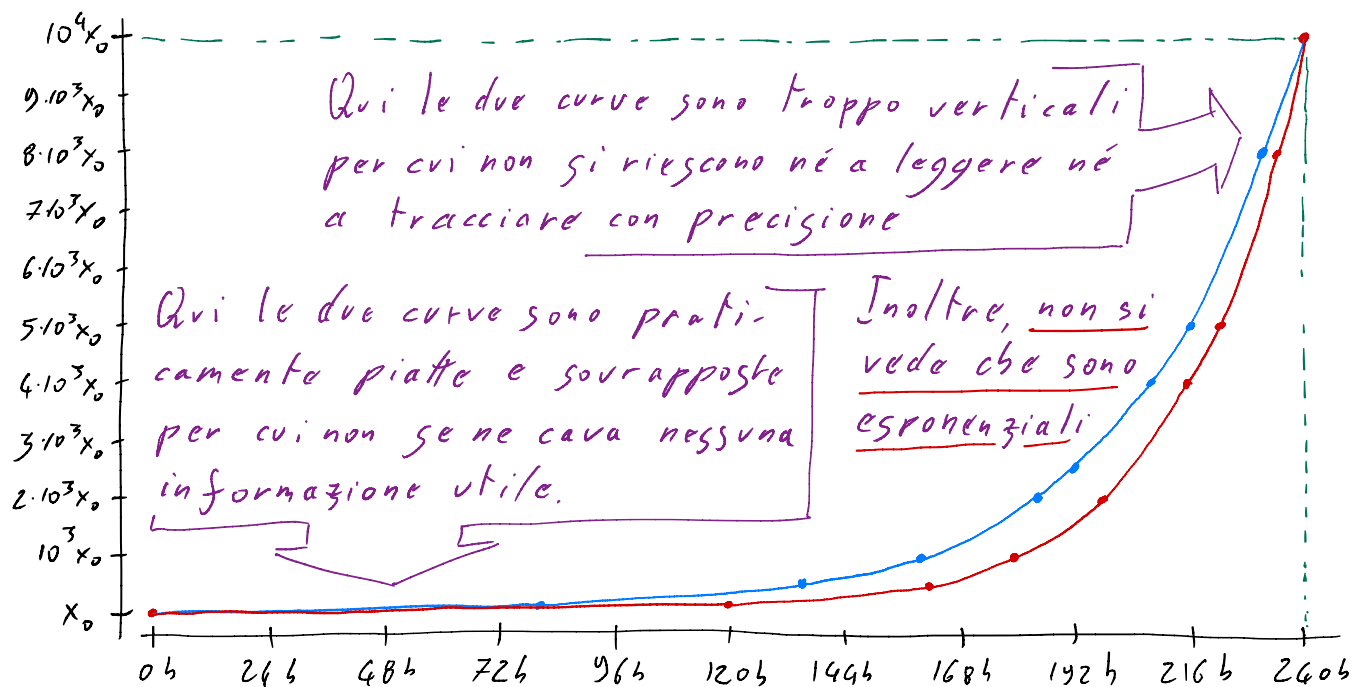


GRAFICO CARTESIANO: CATTIVA IDEA

- B.3** - Si è misurato che, al tempo $t = 0$, una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) 10^7$ individui. Al tempo $t = 10h \pm 20m$, la medesima coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) 10^7$. Calcola quanto tempo impiega la coltura Z a raddoppiare, indicando l'errore relativo.

Detto $Z(t)$ il numero di individui in Z al tempo t , abbiamo che la forma generale di $Z(t)$ è $Z(t) = a \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ dove T è il tempo cercato. Detti $z_0 = (1.5 \pm 0.1) 10^7$, $z_1 = (2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$, $t_1 = 10h \pm 20m$, dobbiamo trovare T (e, di conseguenza a) in modo tale che $Z(0) = z_0$ e $Z(t_1) = z_1$.

Facciamo il calcolo, innanzitutto, ignorando le incertezze.

$$\begin{aligned} Z(0) &= a \cdot 2^{\frac{0}{T}} \\ Z(t_1) &= a \cdot 2^{\frac{t_1}{T}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^{\frac{0}{T}} = 1.5 \cdot 10^7 \Rightarrow a = 1.5 \cdot 10^7 \\ a \cdot 2^{\frac{10h}{T}} = 2.5 \cdot 10^7 \Rightarrow 2^{\frac{10h}{T}} = \frac{2.5 \cdot 10^7}{1.5 \cdot 10^7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10h}{T} = \log_2 \frac{2.5}{1.5} \Rightarrow T = \frac{10h \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2.5}{1.5}} \approx 13.57h$$

Nota strategica: a questo punto siamo a $\frac{5}{6}$ dell'esercizio. Non sarebbe saggio incaponirsi sull'ultimo sesto, che è il più difficile, se, per esempio ci manca ancora un intero esercizio degli altri nel compito...

Per stimare le incertezze, ci conviene, intanto, ripetere il calcolo di T in forma letterale.

$$\begin{cases} a \cdot 2^{\frac{0}{T}} = a_0 \Rightarrow a = a_0 \\ a \cdot 2^{\frac{t_1}{T}} = a_1 \Rightarrow 2^{\frac{t_1}{T}} = \frac{a_1}{a_0} \Rightarrow T = \frac{t_1}{\log_2 \frac{a_1}{a_0}} = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{a_1}{a_0}} \end{cases}$$

Ora possiamo determinare il massimo e minimo valore di T al variare dei dati nei loro intervalli di incertezza, oppure anche sfruttare le regole di propagazione degli errori.

Con max e min, per rendere T massimo devo prendere il massimo del numeratore $t_1 \cdot \log_{10} 2$, quindi il massimo di t_1 , e il minimo del denominatore $\log_{10} \frac{a_1}{a_2}$, che, a sua volta, è assunto quando a_1 è minimo e a_2 massimo. Quindi:

$$T_{\max} = \frac{(10h + 20m) \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{(2.5 - 0.2) \cdot 10^7}{(1.5 + 0.1) \cdot 10^7}} \approx 19.74 \text{ h}$$

E, ragionando simmetricamente

$$T_{\min} = \frac{(10h - 20m) \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{(2.5 + 0.2) \cdot 10^7}{(1.5 - 0.1) \cdot 10^7}} \approx 10.20 \text{ h}$$

Non è necessario fare questi ragionamenti, perché T_{max} e T_{min} si possono anche determinare facendo il calcolo in ciascuno degli 8 casi possibili.

Ad ogni modo

$$\text{ERRORE ASSOLUTO} = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = 4.776$$

Quindi:

$$T = (13.57 \pm 4.77)h = (13 \pm 35\%)h$$

ESERCIZIO A Esame del 19.II.2019

Un negativo fotografico (in bianco e nero) è costituito da un materiale parzialmente trasparente, la cui opacità dipende dall'esposizione alla luce che ha ricevuto prima dello sviluppo. La *trasmissione* di un negativo è definita come la frazione T , della luce incidente sul negativo, che lo attraversa. Per esempio, un negativo completamente opaco ha trasmissione 0, e uno completamente trasparente ha trasmissione 1. Un negativo che abbia trasmissione 0.1 lascia passare un decimo della luce che lo colpisce. La *densità ottica* D è definita in funzione della trasmissione dalla formula:

$$D = -\log_{10} T$$

La tabella seguente lega il logaritmo dell'esposizione H , che assumiamo indicata in lux-secondi ($\text{lx} \cdot \text{s}$), alla densità che ne risulta (per un certo tipo di pellicola).

$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D
-2.20	0.18	-1.30	0.54	-0.40	1.28	0.50	1.83
-1.90	0.25	-1.00	0.78	-0.10	1.55	0.80	1.85
-1.60	0.39	-0.70	1.03	0.20	1.73		

A.1 – Traccia un grafico cartesiano che riporti $\log_{10} H$ in ascissa e D in ordinata. Quale esposizione ha ricevuto un negativo che lascia passare il 5% della luce incidente?

Cominciamo dal calcolo dell'esposizione H .

Il dato del 5% ci dice che $T = 0.05$, quindi

$$D = -\log_{10} T \approx 1.3010 \quad (\text{alla fine esprimeremo il risultato})$$

con 2 o 3 cifre significative, perché questa è la precisione della tabella, quindi, nei passaggi intermedi usiamo qualche cifra in più).

Ora leggiamo dalla tabella

D	1.28	1.3010	1.55	← x
$\log_{10} H$	-0.40	?	-0.10	← y

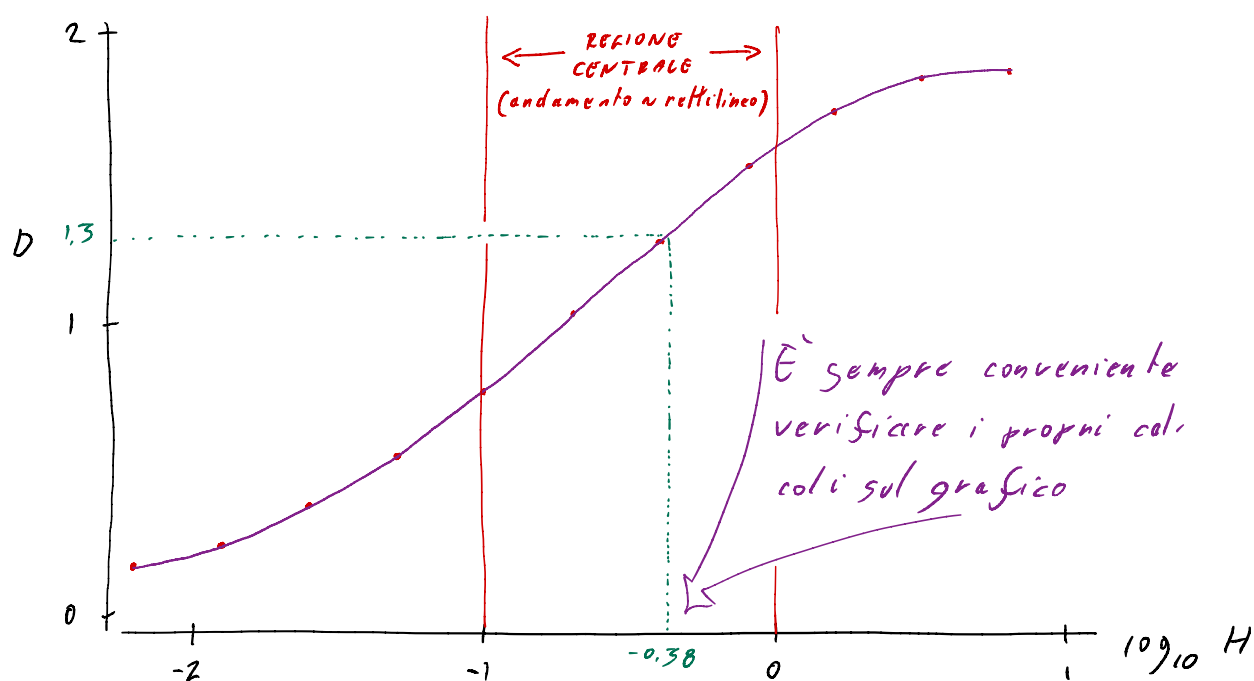
Usando l'interpolazione lineare con la prima riga come x e la seconda come y

$$\log_{10} H = (1.3010 - 1.28) \cdot \frac{-0.10 - (-0.40)}{1.55 - 1.28} + (-0.40) \approx -0.3767$$

Da cui $H = 10^{-0.3767} \approx 0.42$. Ricordandoci che i valori tabulati sono misurati in lxs abbiamo

$$H = 0.42 \text{ lxs}$$

Il grafico richiesto è come segue

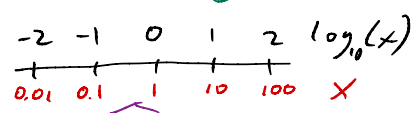


A.2 – Nella regione centrale del grafico, la legge che lega T ad H ha la forma:

$$T = \text{costante} \cdot H^{-\gamma}$$

Determina il valore di γ .

Abbiamo tracciato un grafico cartesiano usando come coordinate $T = -\log_{10} D$ e $\log_{10} H$. Questo stesso grafico, quindi, si può anche vedere come un grafico logaritmico che lega D e H .

Esempio: tracciamo una scala lineare che rappresenta $\log_{10}(x)$  $\log_{10}(x)$ indiciamo ora sotto la scala i valori di x corrispondenti. Come si può osservare abbiamo ottenuto una scala logaritmica in x .

Tutto questo per dire che il grafico di $T = \text{costante} \cdot H^{-\gamma}$, che è una funzione potenza, nelle variabili D e $\log_{10} H$ deve apparire rettilineo, quindi la "regione centrale" dell'esercizio deve riferirsi alla parte di curva indicata nel disegno, che approssima un segmento di retta. Per calcolare i parametri possiamo quindi usare, per esempio, i punti $\log_{10} H_1 = -1.00$, $D_1 = 0.28$ e $\log_{10} H_2 = -0.10$, $D_2 = 1.55$. Partendo dalla relazione data e calcolando il $\log_{10}$ a destra e a sinistra otteniamo

$$\log_{10} T = \log_{10} (\text{costante} \cdot H^{-\gamma})$$

$$-D = \log_{10} (\text{costante}) - \gamma \cdot \log_{10} H$$

Quindi $D = \underbrace{-\log_{10}(\text{costante})}_\text{chiamiamo questo c} + \gamma \cdot \log_{10} H$

Sostituendo i punti in questa relazione

$$\begin{cases} D_1 = c + \gamma \log_{10} H_1 \Rightarrow c = D_1 - \gamma \log_{10} H_1 \\ D_2 = c + \gamma \log_{10} H_2 \Rightarrow D_2 = D_1 - \gamma \log_{10} H_1 + \gamma \log_{10} H_2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{D_2 - D_1}{\log_{10} H_2 - \log_{10} H_1}} = \frac{1.55 - 0.78}{-0.10 - (-1.00)} \approx \boxed{0.86}$$

A.3 – Supponendo di sapere la relazione $T = 0.025 \cdot H^{-0.6}$, se conosci H con un errore relativo del 10%, con quale errore relativo puoi calcolare T ? (Attenzione: la relazione data è puramente ipotetica: 0.6 non è la risposta al punto A.2.)

Supponiamo di conoscere H con una incertezza del 10%. Abbiamo quindi $H = H_0 \pm 10\%$, ossia, algebricamente

$$H_0 (1 - 0.1) \leq H \leq H_0 (1 + 0.1) \quad \text{"con alta probabilità..."}$$

Quindi

$$0.025 (H_0 \cdot 0.9)^{-0.6} \geq 0.025 H^{-0.6} = T \geq 0.025 (H_0 \cdot 1.1)^{-0.6}$$

attenzione: le disuguaglianze si invertono perché $-0.6 < 0$

$$\underbrace{0.025 H_0^{-0.6}}_{T_0} \cdot 0.9^{-0.6} \geq T \geq \underbrace{0.025 H_0^{-0.6}}_{T_0} \cdot 1.1^{-0.6}$$

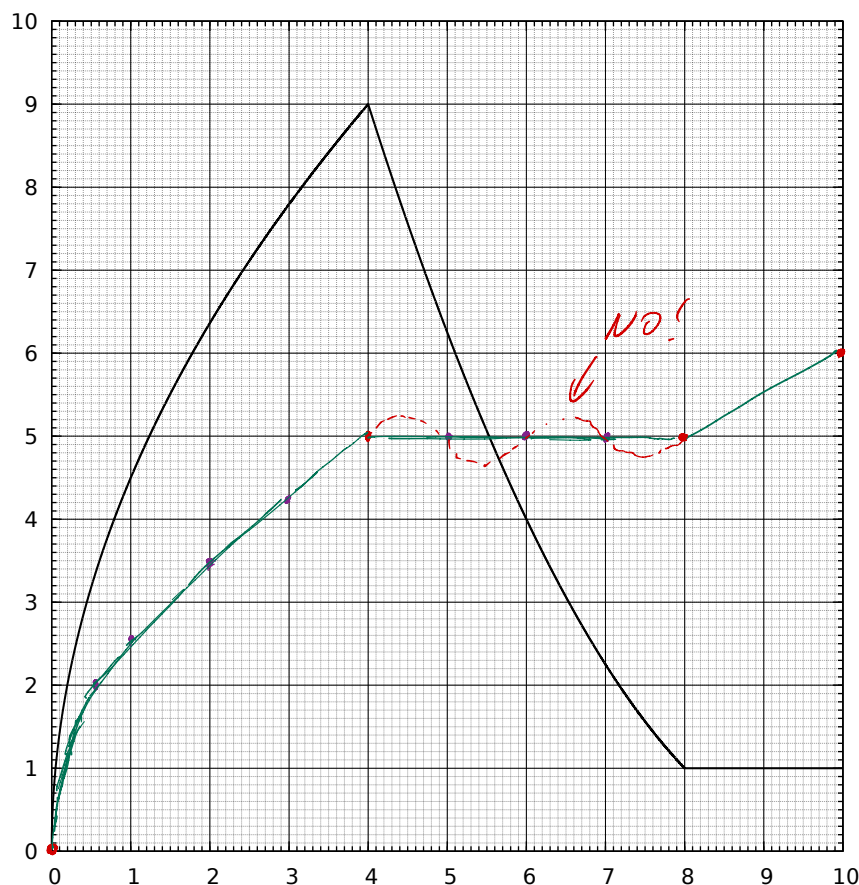
E, in conclusione, detto $T_0 = 0.025 H_0^{-0.6}$, abbiamo

$$\boxed{T = T_0 \pm T_0 \cdot \frac{0.9^{-0.6} - 1.1^{-0.6}}{2}} = T_0 \pm \left(\frac{0.9^{-0.6} - 1.1^{-0.6}}{2} \cdot 100 \right) \% = \boxed{T_0 \pm 6\%}$$

Nota: se uno non riuscisse a svolgere il calcolo algebricamente, potrebbe anche tentare esperimenti numerici.

ESERCIZIO C

Considera la funzione $f: [0, 10] \rightarrow [0, 10]$ il cui grafico è rappresentato in figura.



- C.1** - Traccia il grafico della funzione $g(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{f(x)}$ sul modulo millimetrato che ti è stato fornito. (Per rispondere a questa domanda basta il disegno: non è richiesto che descrivi il tuo procedimento.)

Per comodità, disegniamo la nuova funzione $g(x)$ sullo stesso diagramma di f .

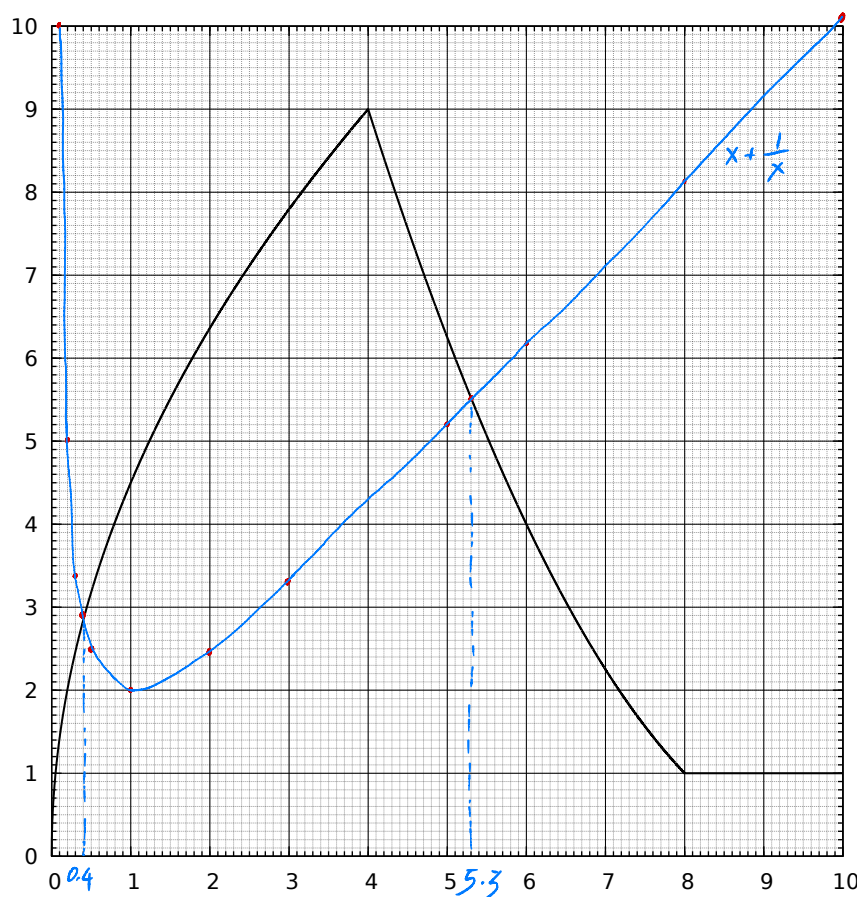
- C.2** - Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$f(x) - x - \frac{1}{x} = 0$$

nell'intervallo $[0, 10]$, approssimando alla prima cifra decimale.

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Le soluzioni sono, quindi, le ascisse dei punti di intersezione fra il grafico di $f(x)$ e quello di $x + \frac{1}{x}$.

Notiamo che ci sono due soluzioni in prossimità di $\boxed{0.4}$ e $\boxed{5.3}$.



Per verificare numericamente queste soluzioni, possiamo osservare che esse corrispondono a punti di cambiamento del segno di $f(x) - x - \frac{1}{x}$

x	$f(x)$	$x + \frac{1}{x}$	$f(x) - x - \frac{1}{x}$
0.3	2.4	3.6	-1.2
0.4	2.8	2.9	-0.1
0.5	3.2	2.5	0.7

5.2	5.7	5.4	0.3
5.3	5.5	5.5	0
5.4	5.3	5.6	-0.3

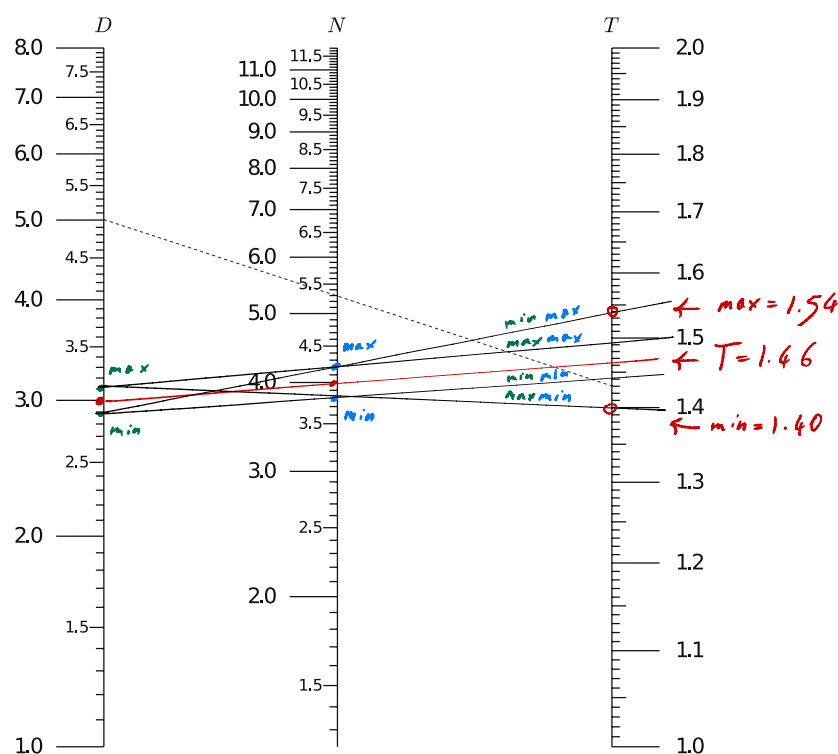
Matematica per CTF

Diciannovesima lezione

ESERCIZIO C

Esame del 2.v.2019

Un *nomogramma* è uno strumento di calcolo grafico che veniva usato durante il ventesimo secolo, e, sebbene raramente, si usa ancora oggi. Il nomogramma disegnato qua sotto rappresenta una relazione che lega tre quantità, D , N , e T . Si usa per calcolare una delle tre quantità, note le altre due. Per esempio, sapendo che $D = 5.0$ e $T = 1.43$, si traccia una linea retta (tratteggiata nella figura) che connette i punti corrispondenti sulle rispettive scale, e, l'intersezione di questa retta con la scala N indica il valore di questa quantità: $N = 5.3$.



C.1 – Supponendo di sapere che $D = 3.0 \pm 0.1$ e $N = 4.0 \pm 0.2$, che valore di T otteniamo, e con quale incertezza?

Questo è in larga misura un esercizio di *comprensione del testo* (quindi, detto per inciso, un esercizio uguale non capiterà più, però potrebbero capitare altri esercizi in cui è fondamentale capire una procedura descritta nel testo).

La procedura descritta, applicata ai dati della domanda, e ignorando, per ora, le incertezze, è come segue:

- segna il punto $D=3.0$ sulla scala D
- segna il punto $N=4.0$ sulla scala N
- la retta passante per questi due punti intersecherà la scala T ad un certo valore
- quello è il risultato cercato.

Questa procedura genera la retta **rossa** sul disegno, quindi $T=1.46$. Per stimare l'incertezza ripetiamo il procedimento usando gli estremi degli intervalli di incertezza

$$D = 3.0 \pm 0.1 \Rightarrow 2.9 \leq D \leq 3.1$$

$$N = 4.0 \pm 0.2 \Rightarrow 3.8 \leq N \leq 4.2$$

Questi estremi si possono combinare in quattro modi (minmin , minmax , maxmin , maxmax), dando luogo a quattro valori di cui il massimo è 1.54 e il minimo 1.40. Abbiamo allora un'incertezza pari a

$$\text{errore} = \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = 0.07$$

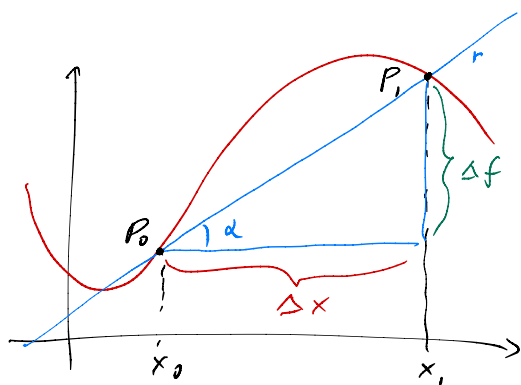
Quindi, in definitiva $T = 1.46 \pm 0.07$

Il rapporto incrementale

inizio l. 19

Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1 , il numero

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \Delta f \\ \leftarrow \Delta x \end{array}$$



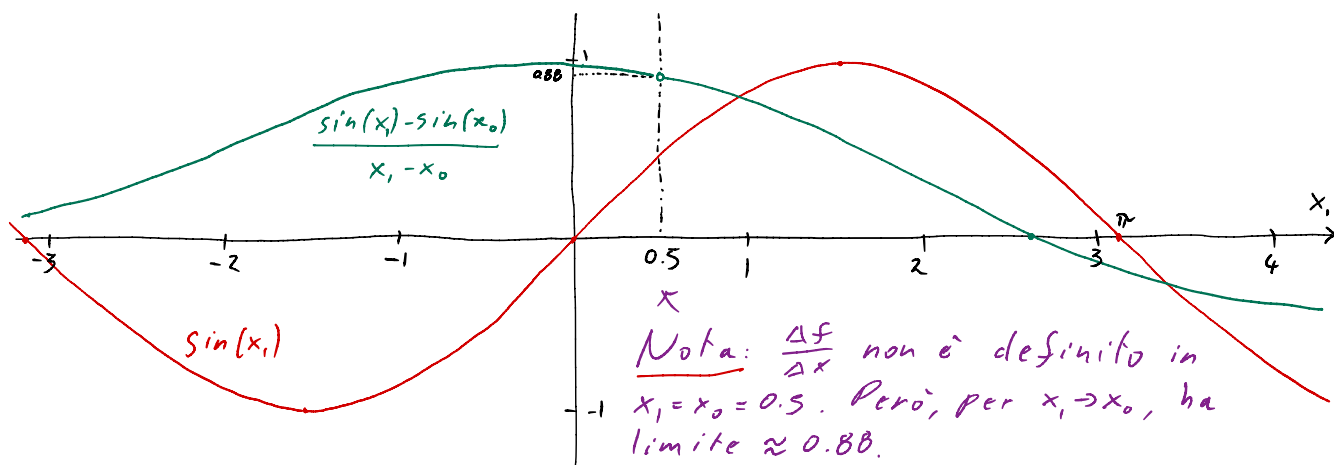
Questo numero può essere altresì descritto come il coefficiente angolare della retta passante per i punti

$P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_1(x_1, f(x_1))$.

E, nel disegno (assumendo che le unità sui due assi siano di uguale lunghezza) $\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

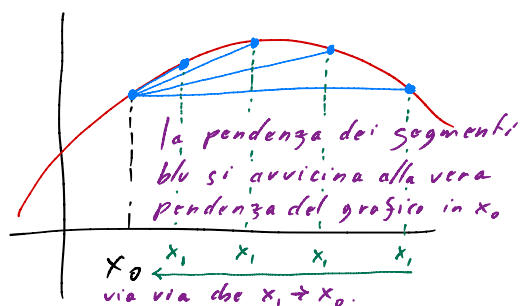
Esempio. Tracciamo il grafico del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sin(x)$, per $x_0 = 0.5$ fissato, al variare di x_1 .

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_1) - \sin(0.5)}{x_1 - 0.5}$$



Definizione di derivata

Via via che x_1 si avvicina a x_0 , il rapporto incrementale $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ rappresenta la pendenza di rette che approssimano il grafico di f sempre meglio nelle più immediate vicinanze di x_0 . Si definisce quindi la **derivata**



di $f(x)$ in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

La derivata di f (che indichiamo

con f') può essere calcolata in ogni x_0 , quindi è una nuova funzione che associa a ogni x_0 il valore $f'(x_0)$. Geometricamente, questa funzione rappresenta la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 . Operativamente, possiamo dedurre l'espressione di f' direttamente dalla espressione di f . Le regole sono alla pagina seguente.

Nota 1: le regole scritte in verde si possono dedurre a partire dalle altre regole: provateci per esercizio.

Nota 2: queste regole illustrano l'importanza del numero e (chiamato alle volte numero di Nepero, alle volte numero di Eulero). Infatti $(10^x)' = 10^x \log_e(10)$. Non è possibile calcolare le derivate di esponenziali e logaritmi in una base qualunque senza fare uso del logaritmo in base e .

Derivate delle funzioni elementari

$$(costante)' = 0 \quad (x^k)' = k x^{k-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (\log_e(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (a^x)' = a^x \log_e(a) \quad (\log_b(x))' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Regole di derivazione

$$(f+g)' = f' + g' \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x))$$

$$(f-g)' = f' - g' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Esempio di applicazione: $h(x) = \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}$ $h'(x) = ?$

applico $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$h'(x) = (\sin(x^2))' \cdot \cos(x) + \sin(x^2) \cdot (\cos(x))' =$$

applico $(f(g(x)))'$

con $f(y) = \sin(y) \Rightarrow f' = \cos(y)$
e $g(x) = x^2$

$$(\sin(x^2))' = (x^2)' \cdot \cos(x^2) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

uso $(x^k)' = k x^{k-1}$

$$\Rightarrow = 2x \cos(x^2) \cos(x) - \sin(x^2) \sin(x)$$

$$\boxed{h'(x) = 2x \cos(x^2) \cos(x) - \sin(x^2) \sin(x)}$$

fine 1.17

