

Altri esempi di calcolo delle derivate

- $f(x) = (x+1)^2$

$$h'(x) = 1 \quad g'(y) = 2y$$

due modi: 1. $f(x) = g(h(x))$ con $h(x) = x+1$ $g(y) = y^2$

$$\boxed{f'(x)} = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 1 \cdot 2(x+1) = \boxed{2x+2}$$

2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\boxed{f'(x)} = \overset{2x}{(x^2)}' + \overset{2}{(2x)}' + \overset{0}{(1)}' = \boxed{2x+2}$$

- $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$

Calcoliamo prima $\overset{g(x)}{}$ la derivata di $g(x) = \sin(\sin(x))$

$$g'(x) = \sin'(x) \cdot \sin'(\sin(x)) = \cos(x) \cdot \cos(\sin(x))$$

ora $f(x) = h(g(x))$ con $h(x) = \sin(x)$ quindi

$$\boxed{f'(x)} = g'(x) \cdot h'(g(x)) = \boxed{\cos(x) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(\sin(\sin(x)))}$$

- $f(x) = \tan(x)$

Questa derivata è tabulata nello specchietto delle derivate di funzioni elementari. Calcoliamola, però, a partire dalla definizione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

usando $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$= \boxed{\frac{1}{(\cos(x))^2}} \quad \text{oppure} \quad = \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \boxed{1 + (\tan(x))^2}$$

- $f(x) = x^{x^2}$

Siccome non abbiamo una regola per gli elevamenti:

$$\boxed{\text{occhio: } x^{x^2} = x^{(x^2)} \neq (x^x)^2}$$

per esempio $3^{3^2} = 3^9 \quad (3^3)^2 = 3^6$

a potenza di funzioni, adoperiamo i logaritmi per portare la funzione ad una forma più maneggevole

$$f(x) = x^{x^2} = (e^{\log_e(x)})^{x^2} = e^{x^2 \cdot \log_e(x)} = g(h(x))$$

$$\text{con } g(y) = e^y \text{ e } h(x) = x^2 \cdot \log_e(x)$$

$$h'(x) = (x^2)' \log_e(x) + x^2 (\log_e(x))' = 2x \log_e(x) + x \quad g'(y) = e^y$$

$$\boxed{f'(x)} = h'(x) \cdot g'(h(x)) = (2x \log_e(x) + x) \cdot e^{x^2 \cdot \log_e(x)}$$

$$= (2 \log_e(x) + 1) \cdot x^{1+x^2}$$

Esempi dagli esercizi per il test

71 • $f(x) = x(x-1)(x+1)$

$$= x(x^2 - 1) = x^3 - x$$

$$f'(x) = (x^3)' - (x)' = \boxed{3x^2 - 1}$$

72 • $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$

$$f'(x) = (x^4)' - (\sin(x))' + (10^x)'$$

$$= \boxed{4x^3 - \cos(x) + 10^x \log_e 10}$$

73 • $f(x) = \sin(2x) \cos(3x)$

$$f'(x) = (\sin(2x))' \cos(3x) + \sin(2x) (\cos(3x))'$$

$$= \boxed{2 \cos(3x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)}$$

74 • $f(x) = e^x \cos(x)$

$$f'(x) = (e^x)' \cos(x) + e^x (\cos(x))'$$

$$= e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = \boxed{e^x (\cos(x) - \sin(x))}$$

75 • $f(x) = e^{x \cos(x)}$

Questa è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha} x \cdot \cos(x) \xrightarrow{\beta} e^{x \cdot \cos(x)}$$

$$\alpha: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cdot \cos(\mathbb{R})$$

$$\beta: \Delta \mapsto e^\Delta$$

$$f(x) = \beta(\alpha(x))$$

$$f'(x) = \beta'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$\alpha'(x) = (x \cdot \cos(x))' = (x)' \cdot \cos(x) + x \cdot (\cos(x))' = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

$$\beta'(\Delta) = (e^\Delta)' = e^\Delta$$

$$\boxed{f'(x) = e^{x \cdot \cos(x)} \cdot (\cos(x) - x \sin(x))}$$

76 • $f(x) = x^x = e^{x \log_e x}$

Nuovamente una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha} x \cdot \log_e x \xrightarrow{\beta} e^{x \cdot \log_e x}$$

$$\alpha: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cdot \log_e(\mathbb{R})$$

$$\beta: \Delta \mapsto e^\Delta$$

$$\alpha'(x) = (x)' \log_e x + x (\log_e x)' = \log_e(x) + 1$$

$$\beta'(\Delta) = e^\Delta$$

$$f'(x) = e^{x \log_e x} \cdot (1 + \log_e x) = \boxed{x^x \cdot [1 + \log_e x]}$$

77 • $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$

$$f'(x) = (\tan(x))' + (\log_e(x))'$$

$$= \boxed{\frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{1}{x}}$$

78 • $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$

Studiamo separatamente i due addendi

$\sin(x^2)$ è una funzione composta

$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow \sin(x^2)$$

$$(\sin(x^2))' = \underbrace{\cos(x^2)}_{\sin'} \cdot \underbrace{2x}_{(x^2)'}$$

La derivata di $\log_{10}(x)$ è data da una formula mnemonica

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{x \cdot \log_e b}$$

Però si può anche ricavare dalla formula di cambiamento di base

$$(\log_b(x))' = \left(\underbrace{\frac{\log_e x}{\log_e b}}_{(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)} \right)' = \frac{1}{\log_e b} \cdot \underbrace{(\log_e x)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \cdot \log_e b}$$

Mettendo le cose insieme

$$f'(x) = (\sin(x^2))' + (\log_{10}(x))' = 2x \cdot \cos(x^2) + \frac{1}{x \cdot \log_e 10}$$

Nota Nei testi si può trovare la formula per la derivata del logaritmo

$$(\log_b x)' = \frac{\log_b e}{x}$$

Questa formula, in realtà è equivalente alla nostra perché vale l'identità

$$\log_{\square} \Delta = \frac{1}{\log_{\Delta} \square}$$

Per renderci conto, a sua volta, di questa, applichiamo

la formula di cambiamento di base per scrivere $\log_{\square} \Delta$ usando la base Δ

$$\log_{\square} \Delta = \frac{\log_{\Delta} \Delta}{\log_{\Delta} \square} = \frac{1}{\log_{\Delta} \square}$$

79 • $f(x) = \log_x 2$

Purtroppo non abbiamo una formula per derivare rispetto alla base. Per uscirne dobbiamo quindi usare la formula di cambiamento di base

$$f(x) = \log_x 2 = \frac{\log_e 2}{\log_e x}$$

Abbiamo ora una funzione composta

$$x \xrightarrow[\alpha: \square \mapsto \log_e(\square)]{} \log_e x \xrightarrow[\beta: \Delta \mapsto \frac{\log_e \Delta}{\Delta}]{} \frac{\log_e 2}{\log_e x}$$

$$f'(x) = -\frac{\log_e 2}{(\log_e x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{-\log_e 2}{x (\log_e x)^2}}$$

80 • $f(x) = \log_e (x^4)$

Metodo 1 (proprietà dei logaritmi)

$$f(x) = \log_e (x^4) = 4 \cdot \log_e (x) \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (\log_e x)' = \boxed{\frac{4}{x}}$$

Metodo 2 (funzione composta)

$$x \xrightarrow{} x^4 \xrightarrow{} \log_e (x^4)$$

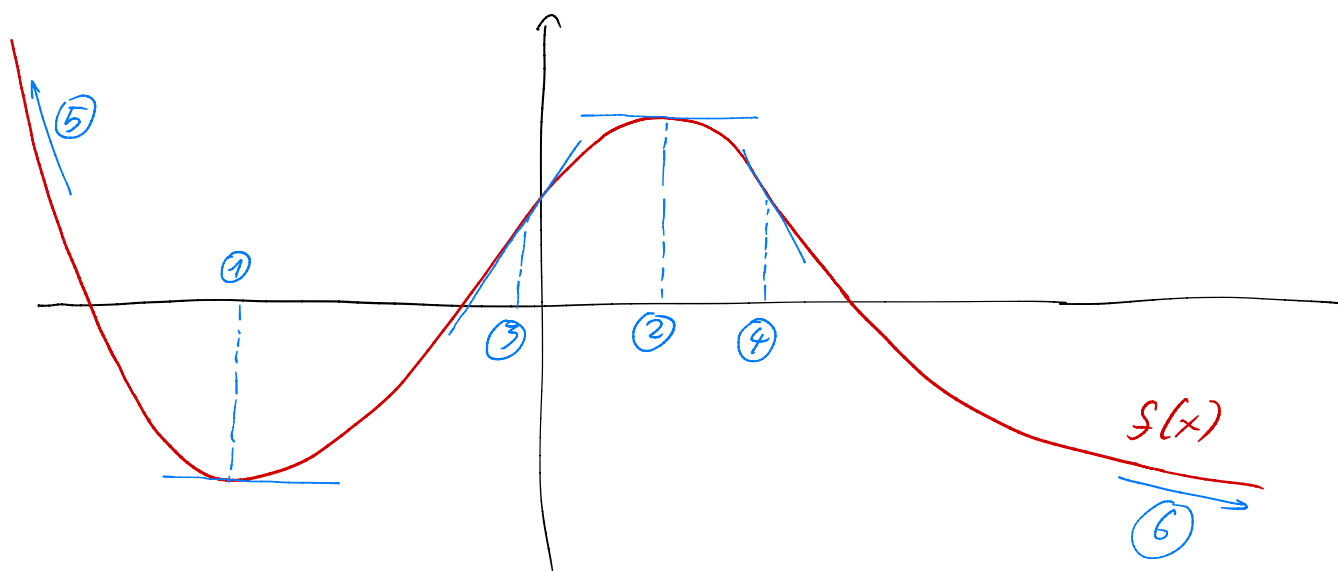
$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{(\log_e(x^4))'} \cdot \underbrace{4x^3}_{(x^4)'} = \boxed{\frac{4}{x}}$$

Grafici e derivate

Siccome sappiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 (in un diagramma in cui ascisse e ordinate abbiano la stessa scala), possiamo farci un'idea qualitativa (ossia PRIVA DI ACCURATEZZA NUMERICA) del grafico di f' semplicemente osservando il grafico di f . Conviene tenere a mente questi principi:

- dove il grafico di f è orizzontale, $f' = 0$.
-  "  crescente, $f' > 0$.
-  "  decrescente, $f' < 0$.
- maggiore è l'inclinazione del grafico di f rispetto all'orizzontale, maggiore è $|f'|$.

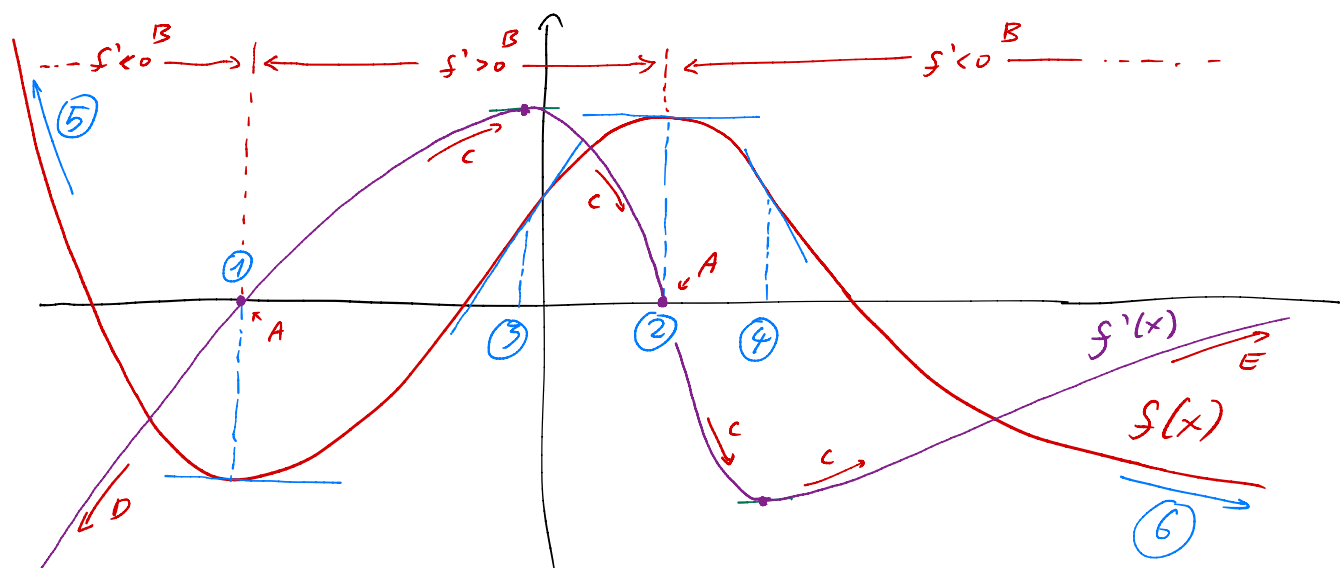
Esempio Tracciare un grafico qualitativo della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è dato in figura.



Ragioniamo così:

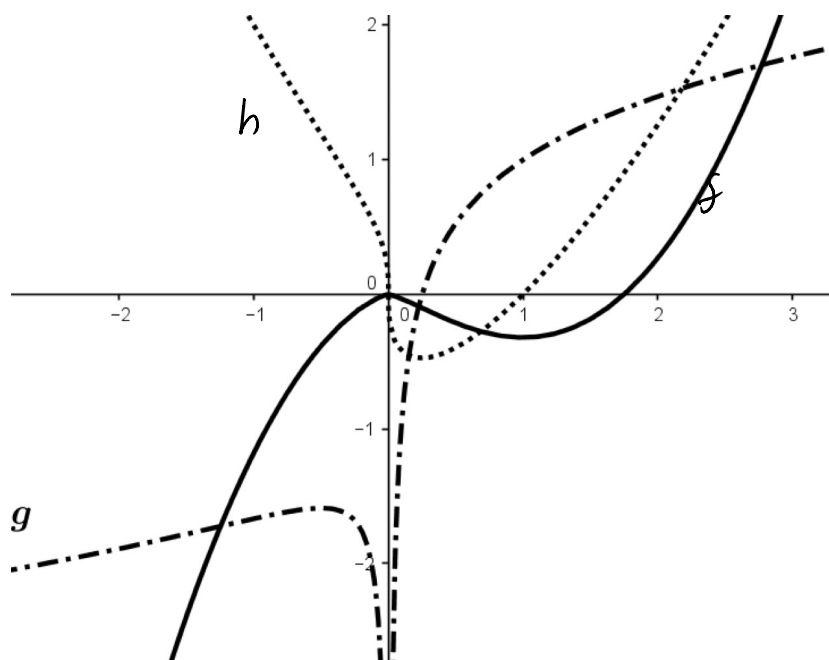
- A Nei punti ① e ② f è orizzontale, quindi $f' = 0$.
- B f decresce a sinistra di ①, cresce fra ① e ②, e decresce a destra di ②. Quindi $f' > 0$ fra ① e ②, e $f' < 0$ altrimenti.
- C I punti ③ e ④ sono punti di massima pendenza per f , detti anche punti di flesso, quindi
 - f' cresce a sinistra di ③
 - f' decresce fra ③ e ④
 - f' cresce a destra di ④.
- D In ⑤ f' pare assumere valori arbitrariamente negativi.
- E In ⑥ il grafico di f sembra essere sempre più orizzontale, quindi f' si avvicina allo zero.

Sfruttando queste considerazioni possiamo ottenere il grafico seguente.

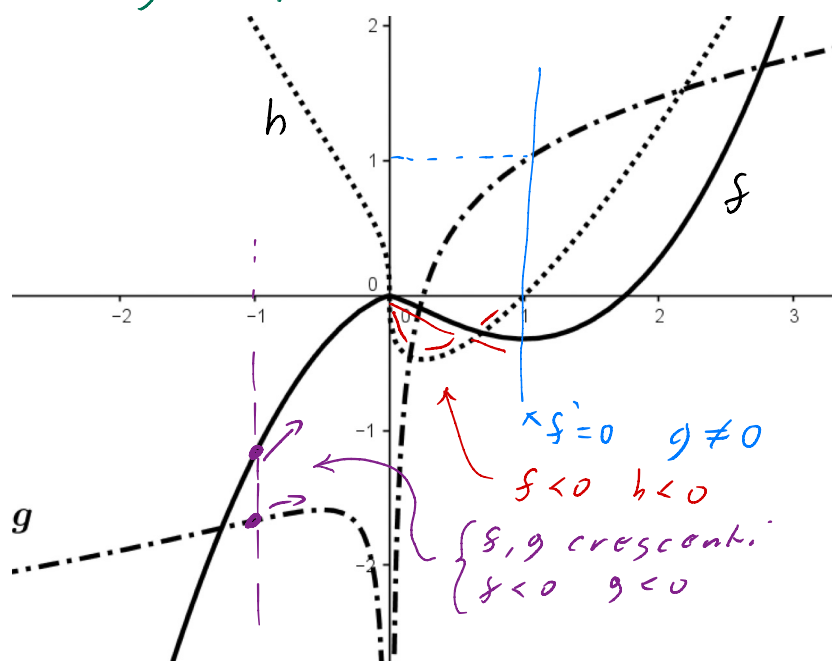


Esercizio (dal corso della prof. Baccaglioni-Frank)

Il grafico seguente rappresenta tre funzioni di cui una è la primitiva, una la derivata, e una la derivata seconda (derivata della derivata). Chi è chi?



Per risolvere l'esercizio consideriamo tre ipotesi:



1. f è la primitiva. Siccome intorno a $x=1$ il

grafico di f è orizzontale, in quei paraggi deve esserci un punto di annullamento di f' . Di certo, però, $g \neq 0$ (infatti, dal grafico $g(1) \approx 1$). In questo caso, l'unica possibilità è, quindi, $f' = h$, e, per esclusione, $h' = g$.

2. g è la primitiva. Vediamo bene che g è crescente nel semiasse positivo. Quindi la derivata dovrebbe essere positiva per $x > 0$. Però, fra 0 e 1 , sia f che h sono negative. Non c'è un candidato valido per la derivata, quindi **dobbiamo escludere questa ipotesi**.

3. h è la primitiva. In questo caso f e g dovrebbero essere una la derivata dell'altra (o f di g , oppure g di f). Però, intorno a $x = -1$, f e g sono entrambe crescenti ed entrambe negative, e questo non può essere, perché quella delle due che è la derivata, essendo derivata di una funzione crescente, dovrebbe essere positiva. Dobbiamo quindi **escludere questa ipotesi**.

In conclusione, deve essere vera l'unica ipotesi che non abbiamo escluso: f è la primitiva, h la derivata e g la derivata seconda.

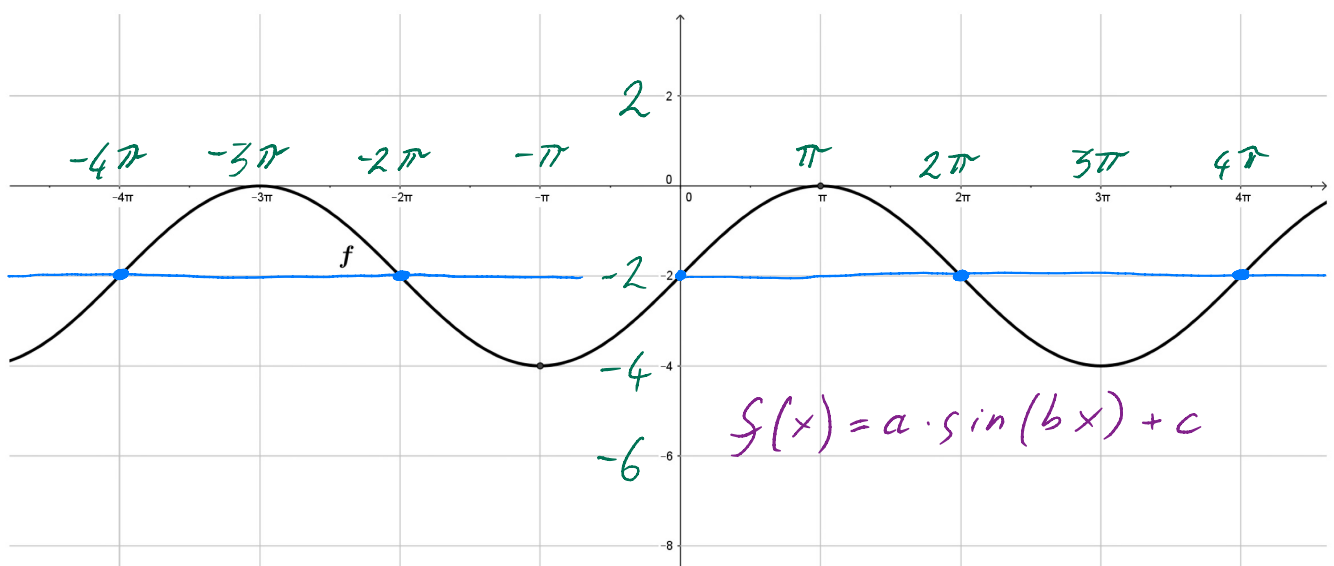
Nota metodologica

Quando ci viene richiesto di identificare il caso vero su una certa lista di casi possibili, non dobbiamo ragionare per conferma, ossia mostrare perché il caso vero è plausibile. Dobbiamo invece RAZIONARE PER ESCLUSIONE, ossia mostrare argomenti incontrovertibili che escludono ciascuno degli altri casi.

Esercizio (un altro esercizio interessante dal corso della prof. Barzaglini-Frank. Non c'entra niente con le derivate)

Interpretare il disegno sottostante come grafico della funzione $f(x) = a \sin(bx) + c$

Trovare il valore dei tre parametri attraverso le informazioni che puoi desumere dal grafico.



Per cominciare notiamo che $f(0) = -2$, quindi

$$-2 = f(0) = \underbrace{a \sin(b \cdot 0)}_{= a \sin(0) = 0} + c = c \Rightarrow f(x) = a \sin(bx) - 2$$

Ora osserviamo che

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow a \cdot \sin(bx) = 0 \Leftrightarrow bx = k\pi \quad \begin{matrix} \text{per qualche} \\ k \text{ intero} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \dots -\frac{3}{b}\pi, -\frac{2}{b}\pi, -\frac{1}{b}\pi, \underline{0}, \frac{1}{b}\pi, \frac{2}{b}\pi, \frac{3}{b}\pi, \dots$$

Dal grafico, però

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x = \dots -4\pi, -2\pi, \underline{0}, 2\pi, 4\pi, \dots$$

Queste due liste di numeri devono quindi coincidere, e, in particolare, $\frac{1}{b}\pi = 2\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

Siamo arrivati a $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$, per determinare a ci basta calcolare, per esempio

$$\underbrace{0 = f(\pi)}_{\text{dal grafico}} = a \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - 2 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

Quindi, in conclusione, $\boxed{f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2}$.

fine l. 20