

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow a \cdot \sin(bx) = 0 \Leftrightarrow bx = k\pi \text{ per qualche } k \text{ intero}$$

$$\Leftrightarrow x = \dots -\frac{3}{b}\pi, -\frac{2}{b}\pi, -\frac{1}{b}\pi, \underline{0}, \frac{1}{b}\pi, \frac{2}{b}\pi, \frac{3}{b}\pi, \dots$$

Dal grafico, però

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x = \dots -4\pi, -2\pi, \underline{0}, 2\pi, 4\pi, \dots$$

Queste due liste di numeri devono quindi coincidere, e, in particolare, $\frac{1}{b}\pi = 2\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

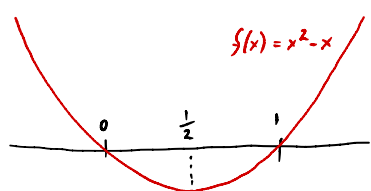
Siamo arrivati a $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$, per determinare a ci basta calcolare, per esempio

$$\underbrace{0 = f(\pi)}_{\text{dal grafico}} = a \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - 2 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

Quindi, in conclusione, $f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$. fine l. 20

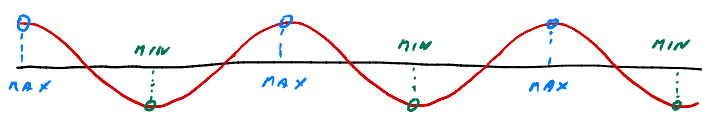
Massimi e minimi di funzioni

Data una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un certo dominio D , diciamo che f ha un massimo nel punto $x_{\max} \in D$ se, per ogni $x \in D$, $f(x) \leq f(x_{\max})$ — in altre parole se f assume in $x_{\max}$ il massimo valore possibile fra gli $f(x)$ con $x \in D$. Diciamo che f ha un punto di minimo in $x_{\min} \in D$ se, per ogni $x \in D$, $f(x) \geq f(x_{\min})$ ossia se f assume in $x_{\min}$ il minimo valore possibile.



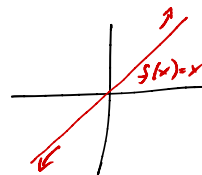
Per esempio, se $f(x) = x^2 - x$ e $D = \mathbb{R}$, il vertice $x_{\min} = \frac{1}{2}$ della parabola $y = x^2 - x$ è un punto di minimo di $f(x)$.

Nota: l'esempio della funzione seno evidenzia che



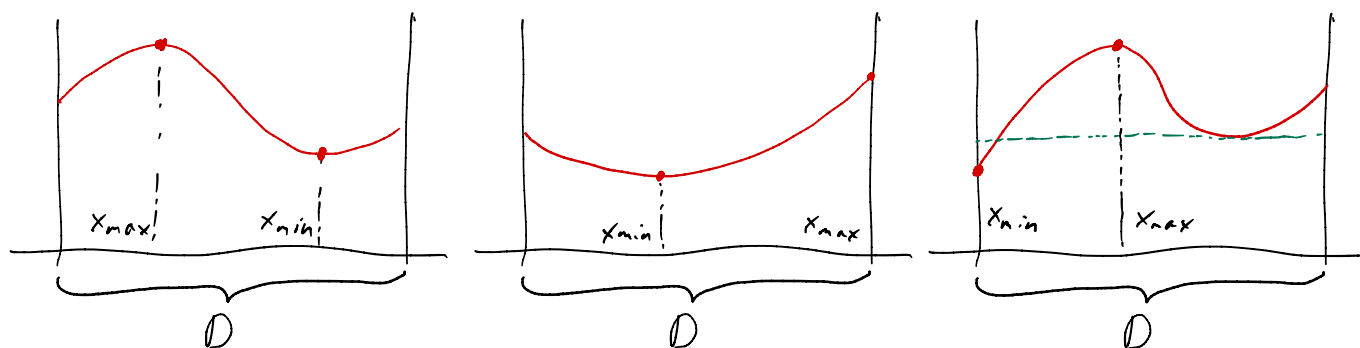
i punti di massimo e minimo non sono sempre unici.

In generale massimi e minimi possono non esistere: basta pensare alla funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f(x) = x$. Però se il dominio D è un intervallo chiuso $[a, b]$ e la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in D .

Se abbiamo la derivata f' di f , allora possiamo cercare massimi e minimi di f sfruttando la seguente osservazione: che i punti di massimo o minimo di f si possono trovare solo dove il grafico di f è orizzontale ($f' = 0$) oppure agli estremi del dominio.



Massimi e minimi in un intervallo chiuso

Data una funzione derivabile $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, per trovarne massimi e minimi ^{questo è l'insieme degli x con $a \leq x \leq b$}

1. calcolo i punti stazionari (ossia risolvo $f'(x)=0$)

ottenendo, diciamo, le soluzioni $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

2. calcolo $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.

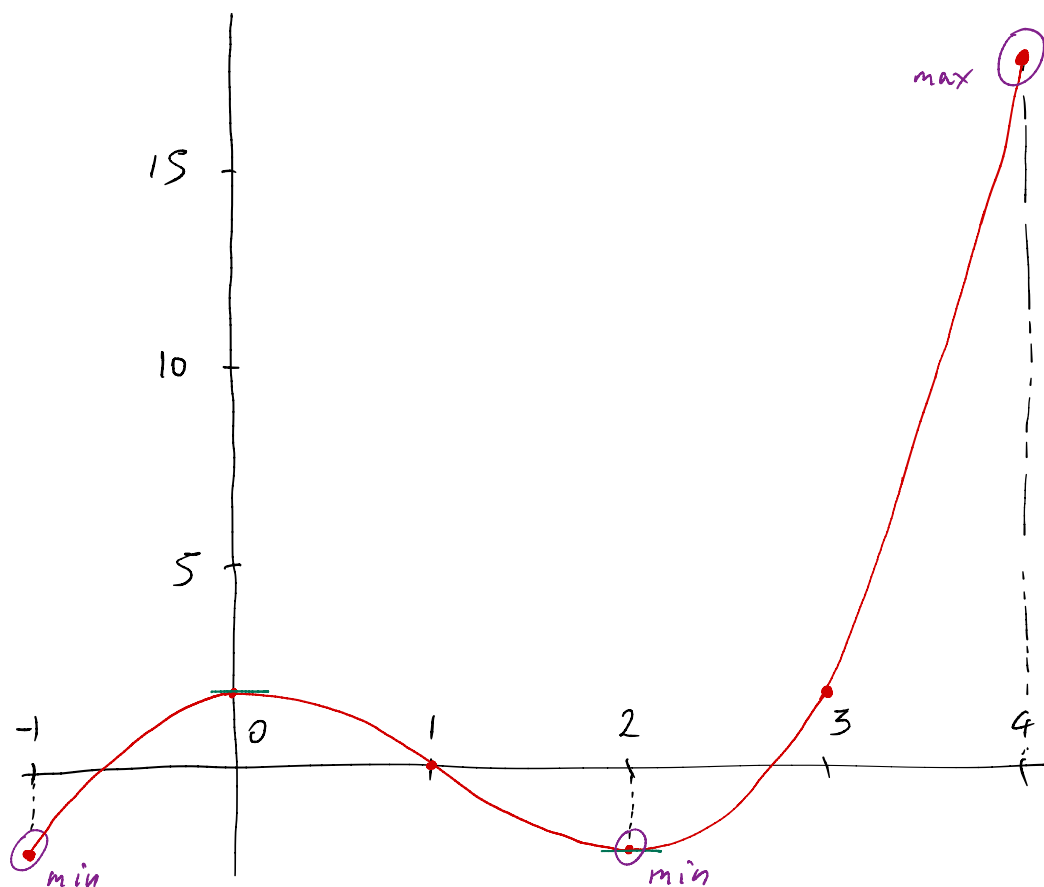
3. quelli fra i punti $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ in cui f assume il valore più grande sono i punti di massimo, quelli in cui assume il più piccolo i punti di minimo.

Esempio trovare massimi e minimi di $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e tracciare un grafico di f .

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$

2. $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -2$, $f(4) = 18$

3. Il più grande di questi numeri, 18, è assunto da $f(x)$ in $x=4$, il più piccolo, -2, in $x=-1$ e $x=2$.



Quindi: $f(x)$ ha un punto di massimo in $x=4$;

$f(x)$ ha due punti di minimo in $x=-1$ e $x=2$;

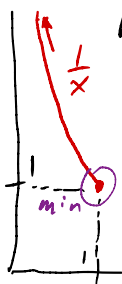
il massimo valore assunto da $f(x)$ è 18;

il minimo valore assunto da $f(x)$ è -2.

Massimi e minimi in generale

Se il dominio della funzione da massimizzare o minimizzare non è un intervallo chiuso (per esempio se è $]a, b[$ ossia l'insieme degli x strettamente compresi fra a e $b \rightarrow a < x < b \rightarrow$ oppure $]a, b]$ ossia gli x con $a < x \leq b$, oppure ancora una semiretta come $[a, +\infty[$ che denota tutti gli $x \geq a$) allora non necessariamente massimi e minimi esistono.

Per esempio la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non ha né un massimo né un minimo. La funzione $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ ha un minimo in $x_{\min} = 1$, ma non ha un massimo perché assume valori arbitrariamente grandi all'avvicinarsi di x a 0. (Ci sono, poi, anche i cavilli burocratici come la funzione $f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$. Questa non ha massimo perché avrebbe tutte le carte in regola per assumere il valore massimo $f(x) = 1$ in $x = 1$, salvo il punto $x = 1$ non appartiene al dominio $[0, 1[$. Di questi casi



ci preoccupiamo il giusto.) Quando il dominio non è un intervallo chiuso possiamo ancora avvalerci degli zeri della derivata per trovare minimi e massimi, però la procedura si complica leggermente.

1. trovo i punti stazionari ($f'(x)=0$)
2. valuto f nei pt. stazionari e negli estremi del dominio (dove siano inclusi)
3. quelli fra i punti precedenti in cui $f(x)$ assume il massimo valore y_{max} sono candidati massimi quelli dove assume il minimo valore y_{min} sono candidati minimi.
4. per decidere se i candidati massimi siano effettivamente massimi occorre capire se $f(x)$ assume valori più grandi di y_{max} all'avvicinarsi di x agli estremi del dominio. Simmetricamente, per decidere se i candidati minimi siano minimi occorre controllare che $f(x)$ non scenda sotto y_{min} agli estremi del dominio.

Il punto 4 può essere più o meno complicato, e c'è più di un modo per affrontarlo: per esempio sfruttando il grafico di f , o studiando il segno della derivata, oppure ancora calcolando i limiti agli estremi.

Esempio Trovare massimi e minimi di $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

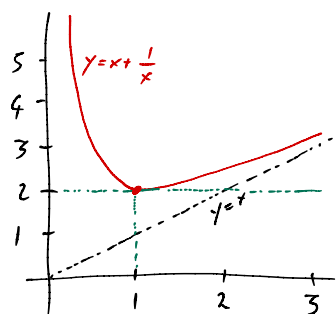
1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_1 = 1$ ($x_2 = -1 \notin]0, +\infty[$)

2. $f(x_1) = 2$ (non c'è altro, perché $]0, +\infty[$ non ha estremi)

3. x_1 è l'unico punto che abbiamo, quindi è sia un candidato massimo sia un candidato minimo.

4. usando il segno della derivata possiamo notare che $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ è negativa a sinistra di $x_1 = 1$, nulla in x_1 , e positiva a destra. $\int_0 \xrightarrow{f' < 0, f \searrow} \underset{x_1=1}{f'=0} \xrightarrow{f' > 0, f \nearrow} \dots$
Quindi f decresce a sinistra di 1, **tocca il minimo in 1**, e cresce dopo 1.

altro modo, studiando il grafico vediamo che sia



per x che si avvicina a 0, sia per x grande, il grafico di f resta sopra il valore $f(1) = 2$, **quindi f ha un minimo in $x_{\min} = 1$.**

Notazioni per le derivate

Abbiamo già visto che la scrittura $f'(x)$ denota la derivata di $f(x)$. La derivata della derivata, detta derivata seconda, si indica con $f''(x)$. Continuando a calcolare derivate successive si ottiene la derivata terza $f'''(x)$, e, più in generale, la derivata n-esima $f^{(n)}(x)$. Nelle

formule $y = f(x)$, $z = f'(x)$, etc. la x si chiama variabile indipendente. Quando è chiaro quale variabile sia la variabile indipendente, si può omettere di indicarla. Per esempio, anziché scrivere $y = f(x) = 3x^2$, $z = f'(x) = 6x$ possiamo abbreviare in $y = 3x^2$, $z = y' = 6x$. Attenzione che non sempre la variabile indipendente è x , per esempio, nella cinematica, x è tendenzialmente una variabile dipendente, mentre la variabile indipendente è il tempo t — potresti quindi incontrare $x = \sin(2t)$, $x' = 2 \cos(t)$.

Un modo di scrivere le derivate comodo, specialmente, quando sono in gioco diverse variabili è

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Questa notazione, che richiama il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (e non va confusa!) ha il vantaggio di indicare la variabile indipendente al denominatore. Inoltre, se, come capita nelle applicazioni, $f(x)$ e x hanno delle dimensioni fisiche (per esempio immaginiamo che x sia una lunghezza misurata in metri $[x] = m$, e che $f(x)$ sia un potenziale elettrico in volt $[f(x)] = V$) la notazione $f' = \frac{df}{dx}$ aiuta a ricordare le dimensioni della derivata. Nell'esempio $[f'] = \frac{[df]}{[dx]} = \frac{V}{m} = V \cdot m^{-1}$, ossia

una intensità di campo elettrico. Altri esempi tipici:

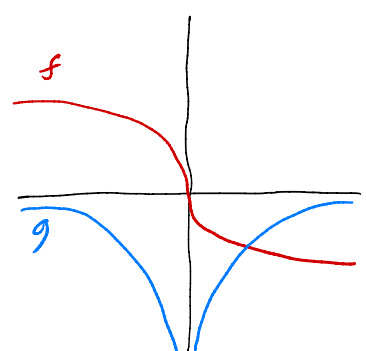
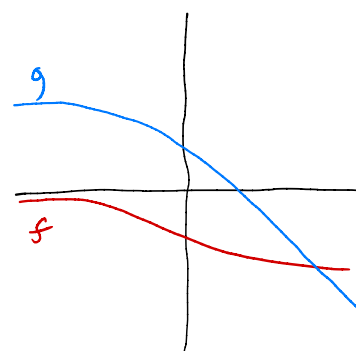
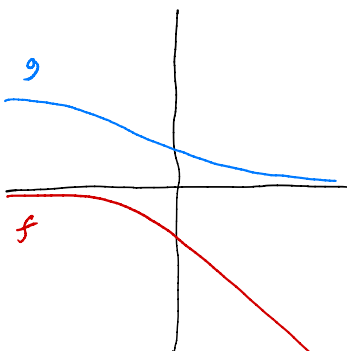
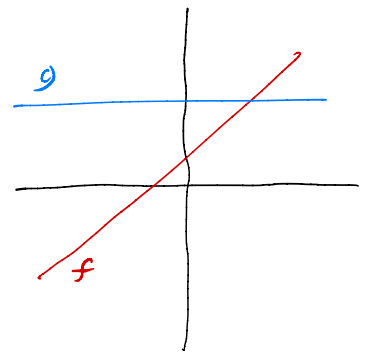
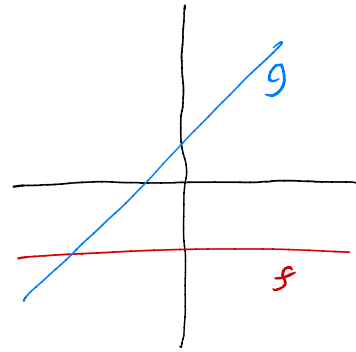
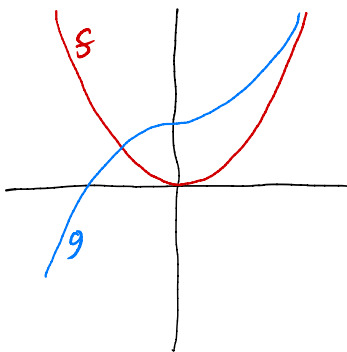
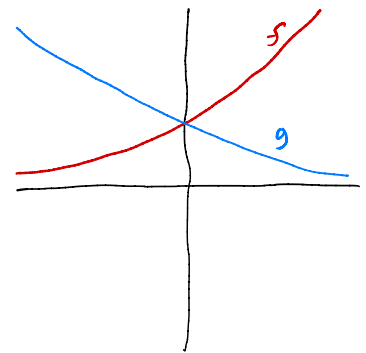
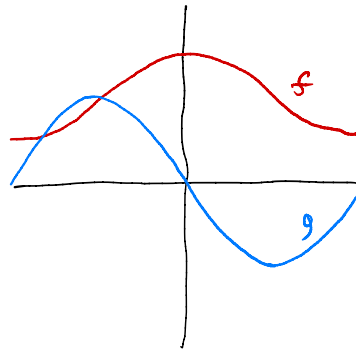
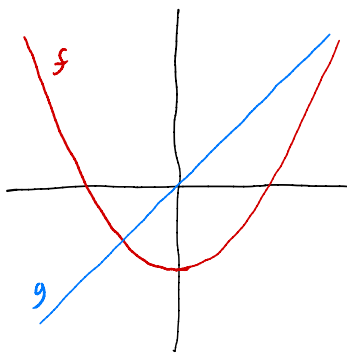
se $[x]=m$ e $[t]=s$, $[x']=m \cdot s^{-1}$, $[x'']=m \cdot s^{-2}$.

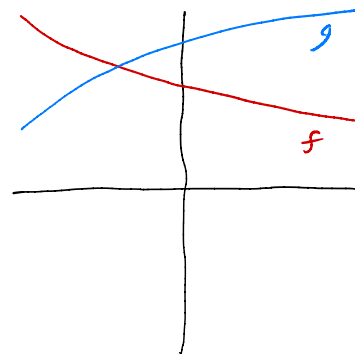
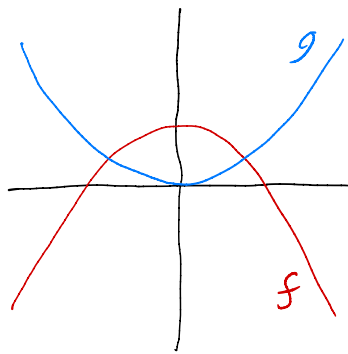
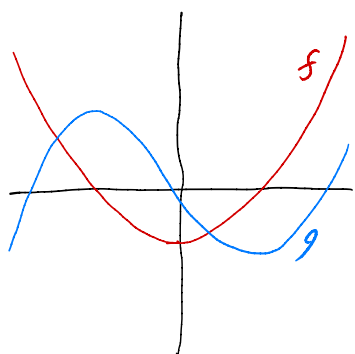
In questo sistema di notazione

la derivata seconda si indica con: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Esercizi su grafici e derivate

(A) Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f è la derivata di g , o g quella di f , oppure non si da nessuno di questi due casi.





- (B) Traccia un grafico della funzione $f(x) = x^2 \cdot \log_e(|x|)$ e della sua derivata per x fra -2 e 2.
- (C) Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.
- (D) Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1, quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.
- (E) Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5, quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

Dal file "Esercizi elementari di analisi matematica", prima parte

- (F) Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg . Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/l , calcola la capienza del fusto.
- (G) Dati i punti $A(-2, -1)$ e $B(0, -1)$, trova il punto $C(x, y)$ sulla retta $x+y=1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

fine l.21