

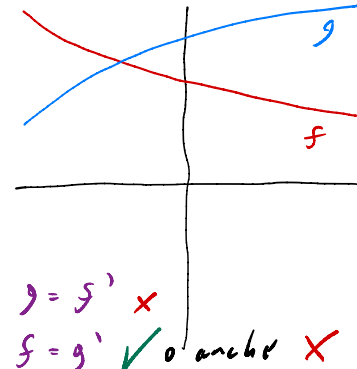
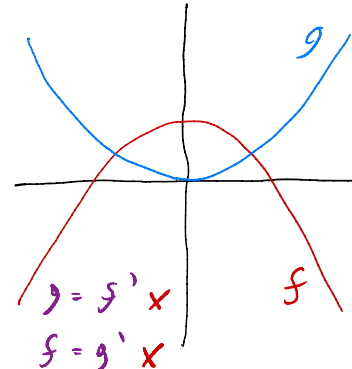
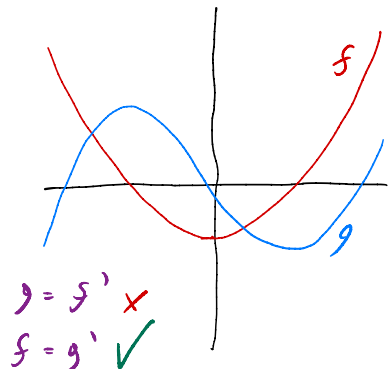
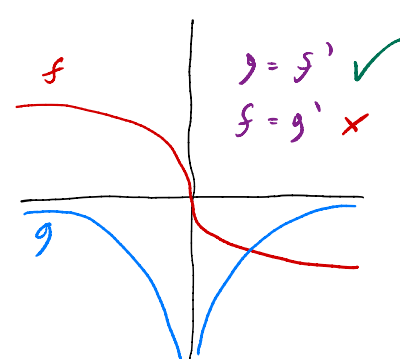
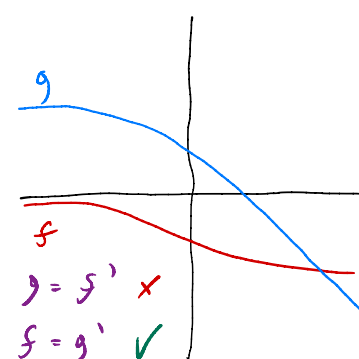
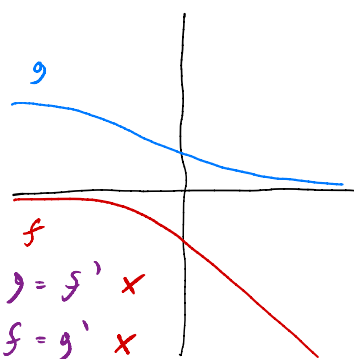
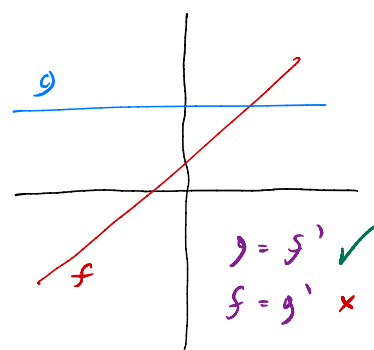
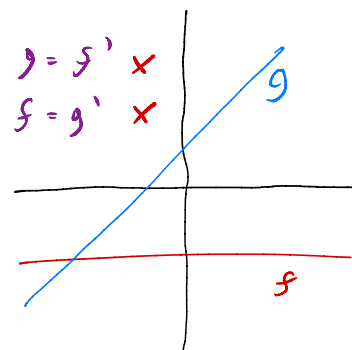
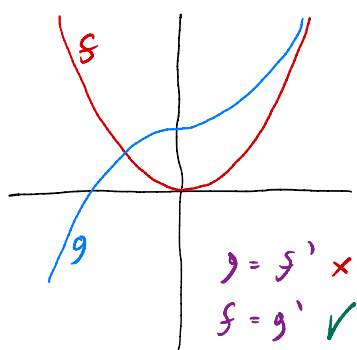
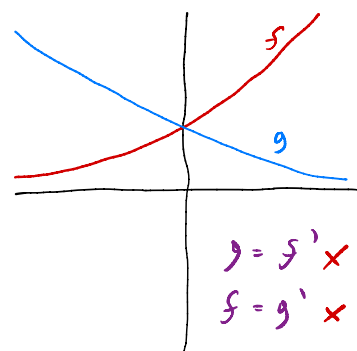
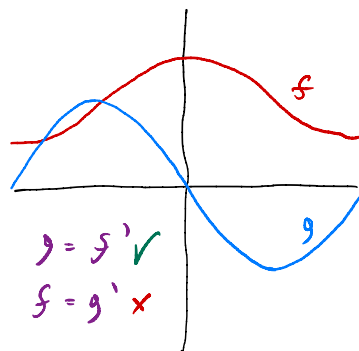
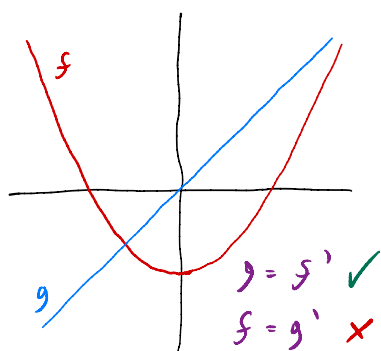
Dal file "Esercizi elementari di analisi matematica", prima parte

- (F) Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/l, calcola la capienza del fusto.
- (G) Dati i punti  $A(-2, -1)$  e  $B(0, -1)$ , trova il punto  $C(x, y)$  sulla retta  $x+y=1$  tale che il perimetro del triangolo  $ABC$  sia più piccolo possibile.

fine l.21

# Soluzioni degli esercizi (visti a lezione: A, C, F)

(A) Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se  $f$  è la derivata di  $g$ , o  $g$  quella di  $f$ , oppure non si da nessuno di questi due casi.

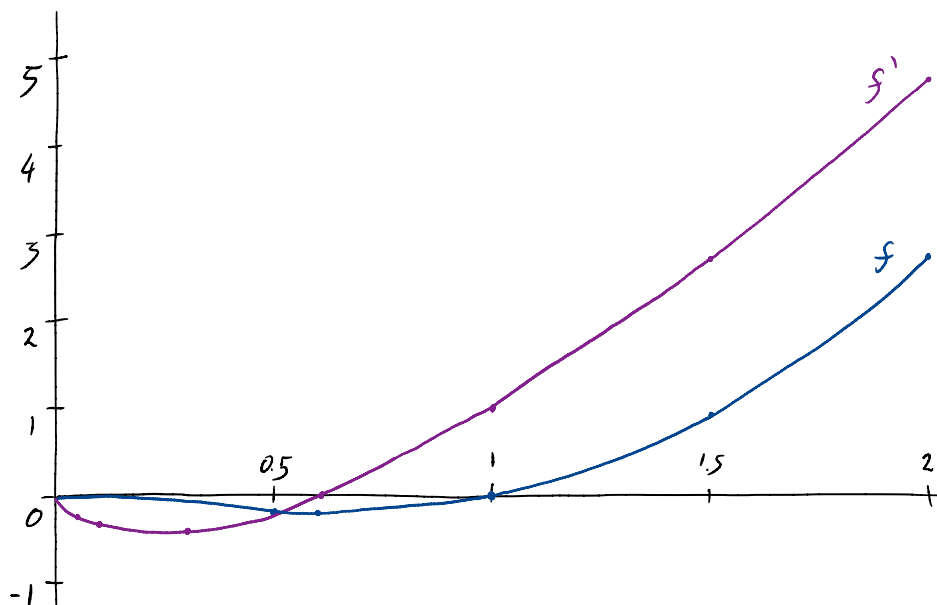


③ Traccia un grafico della funzione  $f(x) = x^2 \cdot \log_e(|x|)$  e della sua derivata per  $x$  fra -2 e 2.

Studiamo intanto la situazione per  $x$  positiva.

$$f(x) = x^2 \cdot \log_e(x) \quad f'(x) = 2x \log_e x + x = x(1 + 2 \log_e x)$$

"  
1x1



Nota: non sempre il medesimo diagramma è appropriato sia per rappresentare una funzione sia per la sua derivata. Conviene, anzi, tenere a mente che spesso è necessario tracciare due grafici distinti, o usare due diverse scale per l'asse delle ordinate nel medesimo diagramma.

Per  $x$  negativa ricorriamo

$$f(x) = x^2 \log_e(-x) \quad f'(x) = x(1 + 2 \log_e(-x))$$

"  
(-x)<sup>2</sup>      |x| = -x  
per x < 0

Ora possiamo completare il grafico avvalendoci di queste espressioni, oppure possiamo osservare le seguenti identità

$$f(-x) = f(x)$$

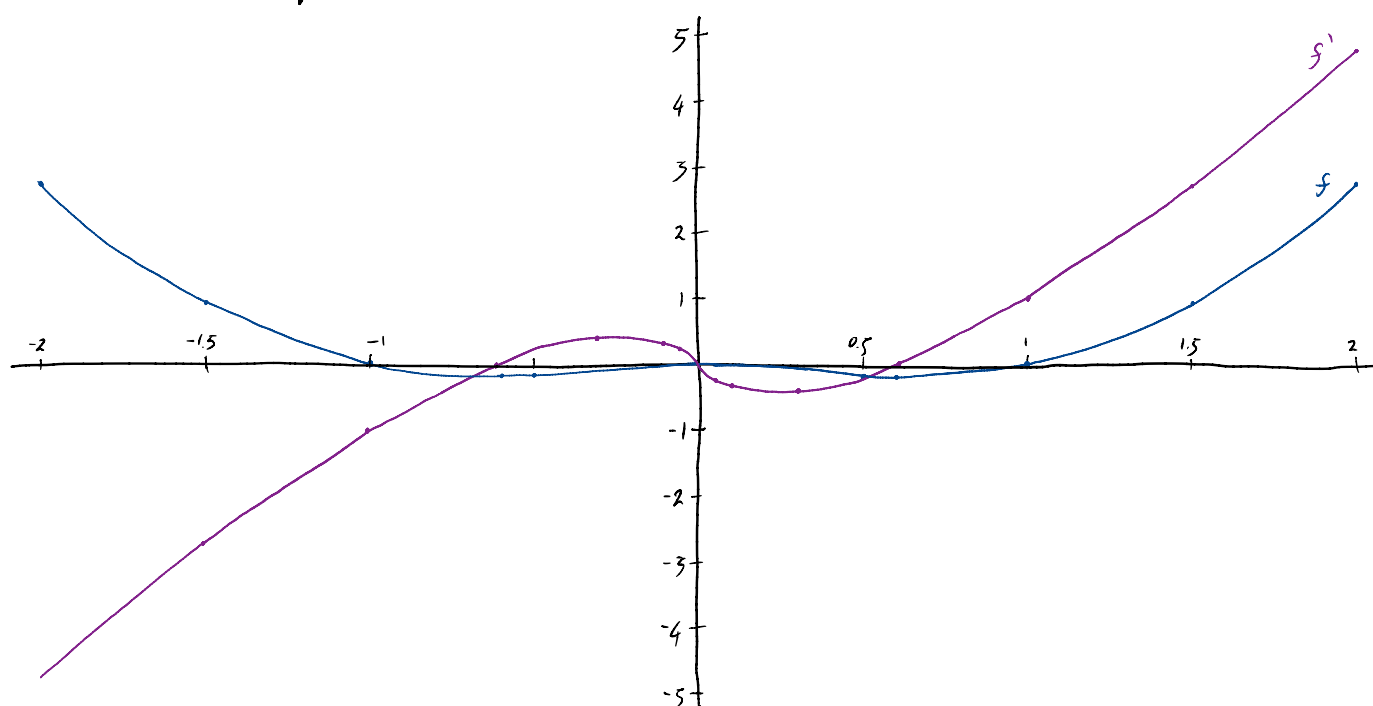
$$f'(-x) = -f'(x)$$

La prima si chiama *simmetria pari*, ci fornisce immediatamente un punto a sinistra dello 0 per ciascuno dei punti a destra che abbiamo già calcolato, ma, ancora meglio, ci dice tout court che il grafico di  $f$  è *simmetrico* — *speculare* — rispetto all'asse delle ordinate.

La seconda si chiama *simmetria dispari*, e ci dice che il grafico di  $f'$  è *simmetrico* rispetto a un centro di simmetria posto nell'origine.

Nota: capita sempre che:

- se una funzione ha simmetria pari, la sua derivata ha simmetria dispari
- se una funzione ha simmetria dispari, la sua derivata ha simmetria pari





c) Trova un polinomio di terzo grado  $f(x)$  tale che  $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$  e  $f(1) = 0$ .

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad \leftarrow \text{generico polinomio di terzo grado}$$

$$f'(x) = 3a x^2 + 2b x + c$$

$$x^2 + \underbrace{3a x^3 + 2b x^2 + c x}_{x \cdot f'(x)} = \underbrace{3a x^3 + 3b x^2 + 3c x + 3d}_{3 f(x)}$$

$$\underbrace{(1-b)}_{=0} x^2 - \underbrace{2c}_{=0} x - \underbrace{3d}_{=0} = 0 \quad \leftarrow \text{questa equazione deve essere soddisfatta per qualunque valore della } x, \text{ di conseguenza i coefficienti sono tutti nulli}^*$$

$$\begin{aligned} 1-b &= 0 & c &= 0 & d &= 0 \\ \underline{b} &= 1 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi  $\underline{f(x) = a x^3 + x^2}$ , però dobbiamo ancora sfruttare il dato  $f(1) = 0$

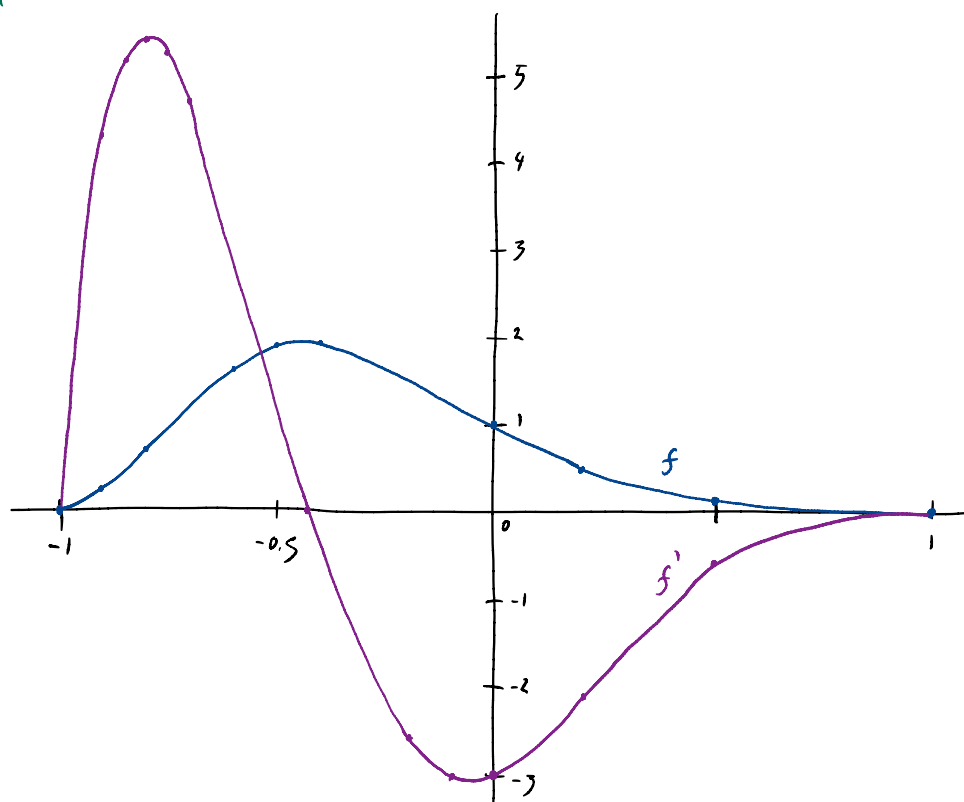
$$0 = f(1) = a + 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = -1}$$

In conclusione  $\boxed{f(x) = -x^3 + x^2}$

\* Se così non fosse, infatti, potremmo risolvere l'equazione, ed otterremmo alcuni specifici valori di  $x$  che la soddisfano, mentre tutti gli altri non la soddisfano. Noi vogliamo, però, che qualunque  $x$  soddisfi l'equazione, e questo è possibile solo se l'equazione non contiene la  $x$  affatto, ossia si riduce a  $0=0$ . Questa osservazione si chiama principio di identità dei polinomi.

(D) Traccia il grafico di  $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$  e della sua derivata  $f'(x)$ , per  $x$  fra  $-1$  e  $1$ , quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di  $f(x)$  è orizzontale.

$$f'(x) = 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4$$



I punti in cui il grafico è orizzontale sono i punti di annullamento della derivata — punti stazionari. Per risolvere l'equazione  $f'(x) = 0$ , conviene raccogliere il fattore  $(1+x)(1-x)^4$  nell'espressione di  $f'$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4 \\ &= (1+x)(1-x)^4(2(1-x) - 5(1+x)) \\ &= \underline{(1+x)(1-x)^4} \underline{(-3-7x)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{(1+x)}_{x=-1} \underbrace{(1-x)^4}_{x=1} \underbrace{(-3-7x)}_{x=-\frac{3}{7}} = 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} x = -1 \text{ oppure } x = 1 \\ \text{oppure } x = -\frac{3}{7} \end{array}}$$

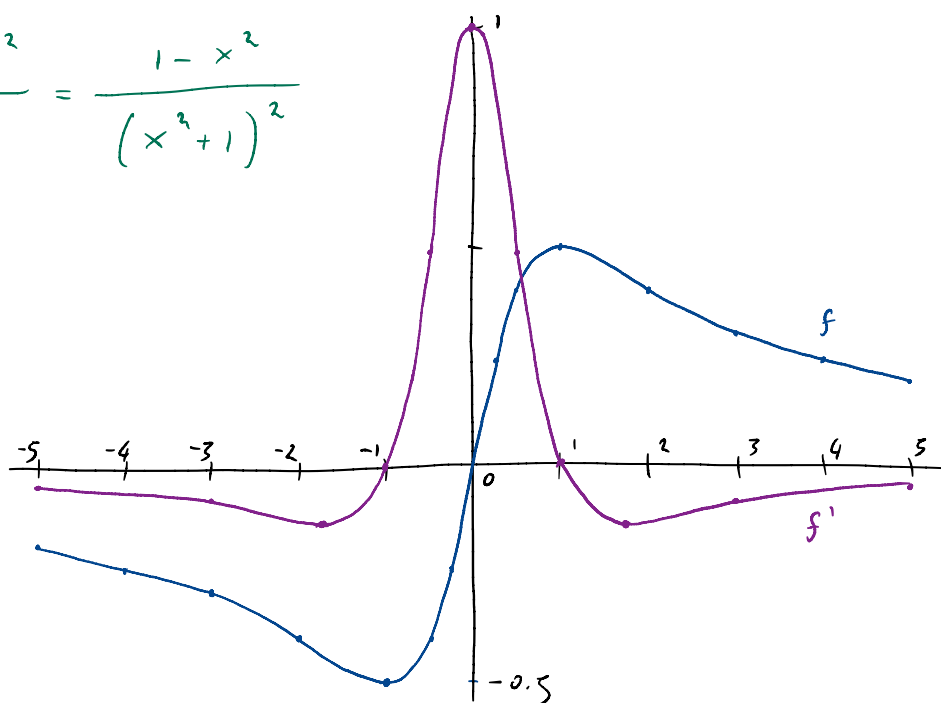
I punti in cui il grafico è orizzontale hanno quindi ascissa  $-1$ ,  $-\frac{3}{7}$ , e  $1$ .

Nota. Espandere il polinomio  $f'$ , anziché raccogliere, cioè scrivere  $f'(x) = -7x^6 + 18x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 2x - 7$ , e poi tentare di risolvere l'equazione è una cattiva idea.

Usando la regola di Ruffini si può fare, e chiaramente si ottengono le soluzioni corrette, ma i calcoli sono così tanti che è difficilissimo non commettere neanche una disattenzione. E ne basta una per cancellare il valore dell'intero procedimento.

⑤ Traccia il grafico di  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  e della sua derivata  $f'(x)$ , per  $x$  fra -5 e 5, quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di  $f(x)$  è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$



Il grafico è orizzontale dove  $f'(x) = 0$

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 1}$$

I punti di massima e minima pendenza sono i massimi e minimi della derivata. Conviene quindi calcolare i punti in cui si annulla la derivata seconda.

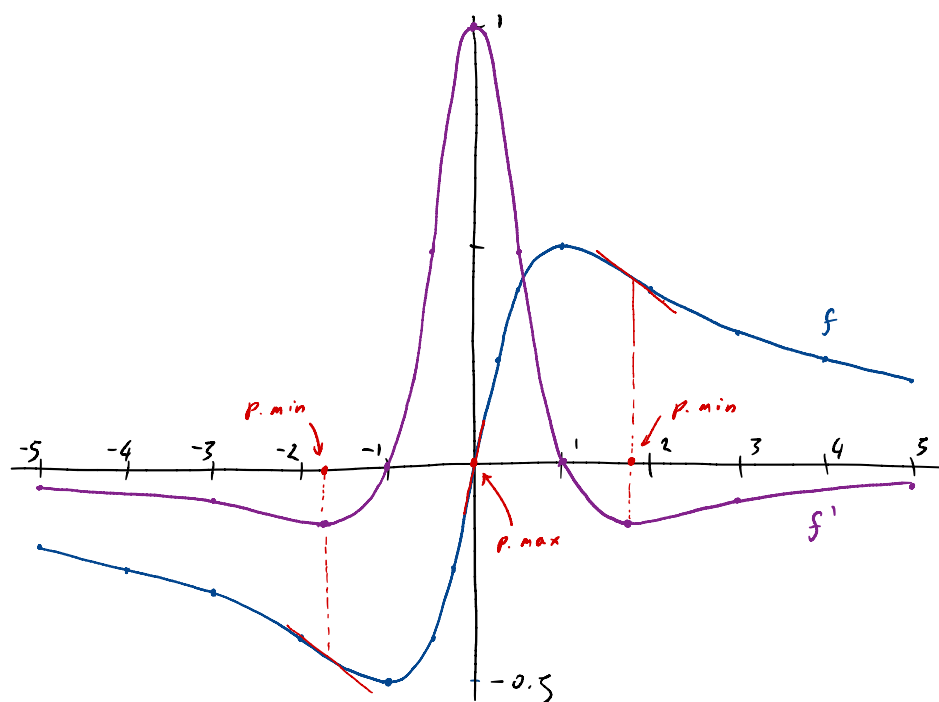
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4(1-x^2)(x^2+1)x}{(x^2+1)^4} = \frac{x(x^2+1)(2x^2-6)}{(x^2+1)^4}$$

Come nell'esercizio precedente, conviene raccogliere il  
 fattore comune  $x(x^2+1)$ . Le soluzioni dall'equazione  $f''=0$   
 sono  $0$  e  $\pm\sqrt{3}$ , quindi massimi e minimi di  $f'$  possono  
 trovarsi nei punti seguenti:

|         |                   |                |     |                |                   |
|---------|-------------------|----------------|-----|----------------|-------------------|
| $x$     | $-5$              | $-\sqrt{3}$    | $0$ | $\sqrt{3}$     | $5$               |
| $f'(x)$ | $-\frac{6}{13^2}$ | $-\frac{1}{8}$ | $1$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{6}{13^2}$ |
|         |                   | MIN            | MAX | MIN            |                   |

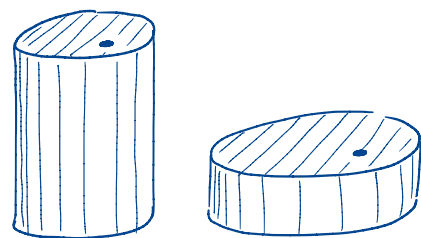
La massima pendenza di  $f(x)$  si ha in  $x=0$  (pendenza=1),  
la minima in  $x=-\sqrt{3}$  o  $x=\sqrt{3}$  (pendenza  $=-\frac{1}{8}$ ).

Nota: è utile verificare la correttezza dei calcoli usando il  
 grafico

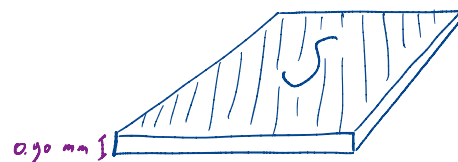


Ⓕ Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa  $0.90 \text{ mm}$  e il peso del fusto vuoto deve essere di  $14 \text{ kg}$ . Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è  $7.85 \text{ kg/L}$ , calcola la capienza del fusto.

Le informazioni nel testo sono, verosimilmente, sufficienti a calcolare la quantità di lamiera di cui disponiamo per costruire il fusto. Tuttavia, usando la medesima quantità di lamiera, è possibile costruire fusti cilindrici di proporzioni differenti. Fra tutte le possibilità, l'esercizio ci chiede di identificare quella che produce il fusto più capiente.



Possiamo quantificare la lamiera a nostra disposizione con la misura  $S$  della sua superficie, che dovrà coincidere con la misura della superficie esterna del fusto. Per ricavare  $S$  dai dati dell'esercizio, consideriamo un foglio



di lamiera di superficie  $S$  come un parallelepipedo avente superficie di base  $S$  ed altezza  $0.90 \text{ mm}$ .

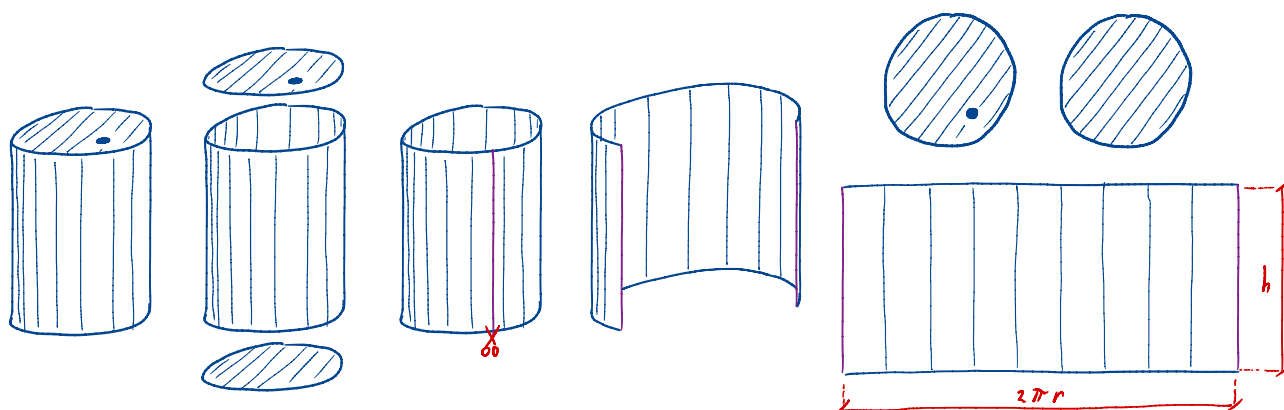
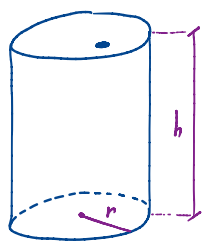
Il volume di acciaio in questo foglio di lamiera è  $S \cdot 0.90 \text{ mm}$ .

Questo volume peserà quindi  $S \cdot 0.90 \text{ mm} \cdot 7.85 \text{ kg/L}$ , e questo è il peso del fusto vuoto che deve valere  $14 \text{ kg}$ .

Abbiamo dunque l'equazione

$$S = 0.90 \text{ mm} \cdot 7.85 \frac{\text{kg}}{\text{L}} = 14 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad S = 1.5816 \text{ m}^2$$

Ora, indichiamo le misure del fusto per mezzo del raggio di base  $r$  e dell'altezza  $h$ . Il valore che, abbiamo calcolato, di  $S$  impone un vincolo che lega  $r$  ad  $h$ . Per esplicitare questo vincolo occorre calcolare la superficie del fusto in funzione di  $r$  e di  $h$ .



Questa superficie è costituita da due cerchi di raggio  $r$  e da un rettangolo  $2\pi r$  per  $h$ :

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{cerchi}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{rettangolo}} = 2\pi r(r+h)$$

Stante il vincolo su  $S$ , possiamo ora ricavare  $h$  in funzione di  $r$  o, viceversa,  $r$  in funzione di  $h$ . Siamo liberi di scegliere come procedere, quindi facciamo la scelta più comoda. Per ricavare  $r$  bisogna risolvere un'equazione di secondo grado, per ricavare  $h$  una di primo: quindi  $r$  sarà la nostra variabile indipendente

$$S = 2\pi r(r+h) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

A noi interessa il massimo del volume, esprimiamo quindi il volume in funzione di  $r$  e  $h$ , quindi, tenuto conto del vincolo, solo di  $r$

$$V = \underbrace{\pi r^2}_{\text{a. base}} \underbrace{h}_{\text{altezza}} = \pi r^2 \left( \frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

Per trovare il massimo calcoliamo la derivata di  $V$  rispetto a  $r$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

Questa derivata si annulla in  $r=r_0=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ , è positiva per  $0 < r < r_0$  e negativa per  $r > r_0$ , quindi  $V$  è una funzione crescente di  $r$  per  $r < r_0$  e decrescente per  $r > r_0$ , che, di conseguenza, ha un massimo assoluto in  $r=r_0$ . Il volume corrispondente è

$$V_{\max} = \frac{S}{2} r_0 - \pi r_0^3 = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} - \cancel{\pi} \frac{S}{\cancel{6\pi}} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 0.214 \text{ m}^3$$

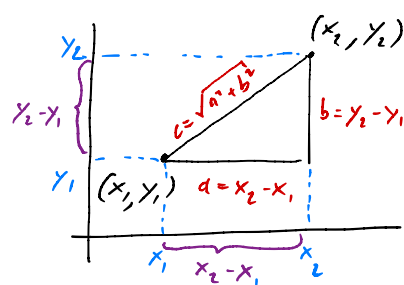
$= 214 \text{ l}$



⑥ Dato i punti  $A(-2, -1)$  e  $B(0, -1)$ , trova il punto  $C(x, y)$  sulla retta  $x+y=1$  tale che il perimetro del triangolo  $ABC$  sia più piccolo possibile.

Cominciamo col ricordare la formula (dalla geometria analitica delle scuole medie superiori) per esprimere la distanza fra  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$\text{distanza}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ora, noi vogliamo trovare il punto  $C$  che minimizza il perimetro

$$\begin{aligned} \text{perimetro}(ABC) &= \underbrace{\text{distanza}(A, B)} + \underbrace{\text{distanza}(A, C)} + \underbrace{\text{distanza}(B, C)} = \\ &= 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{aligned}$$

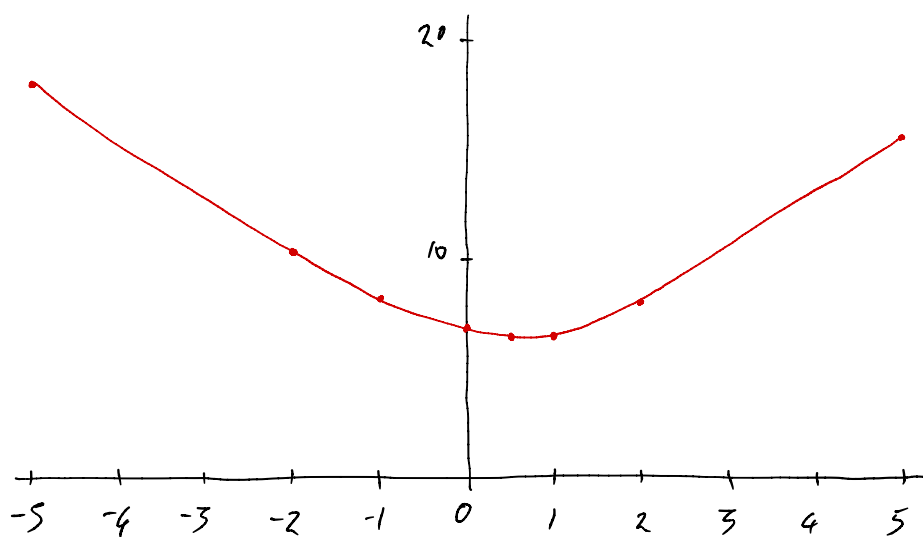
Questa quantità dipende dalle coordinate  $x$  e  $y$  di  $C$ , che, però sono legate fra di loro dalla richiesta che  $C$  appartenga alla retta  $x+y=1$ . Volendo applicare la teoria, che sappiamo, per trovare i minimi di una funzione in una variabile, converrà quindi che esplicitiamo la  $y$  in funzione di  $x$ , sostituendo  $y=1-x$  nella formula.

$$\text{perimetro}(ABC) = 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + (2-x)^2} =: f(x)$$

(chiamiamo il perimetro  $f(x)$ : stiamo cercando i minimi di questa funzione. Conviene fare le semplificazioni algebriche sotto le radici.

$$f(x) = 2 + \sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Avendo una funzione scritta esplicitamente, tracciarne un grafico non può essere l'idea peggiore. Nel nostro caso, siccome le ascisse dei punti dati sono -2 e 0, è ragionevole immaginare che troveremo il punto C in quei paraggi, per cui potremmo tracciare il grafico per  $x$  fra -5 e 5.



Alla luce del grafico ci aspettiamo che il perimetro sia minimo per qualche  $x$  fra 0 e 1, e che questo sia l'unico punto stazionario di  $f$ .

Proviamo ad indagare la situazione rigorosamente...

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 8}} + \frac{4x - 4}{2\sqrt{2x^2 - 4x + 4}}$$

Notiamo intanto che i denominatori non si possono annullare, quindi questa derivata è ben definita per qualunque valore della  $x$ . Cerchiamo i punti stazionari di  $f(x)$ .

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+8}} + \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+4}} = 0$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+8}} = - \frac{\cancel{4}x-\cancel{4}^1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-4x+4}}$$

$$x\sqrt{2x^2-4x+4} = -(x-1)\sqrt{2x^2+8}$$

Ora eleviamo al quadrato ambo i membri. Questo passaggio potrebbe introdurre delle soluzioni spurie — perché elevando al quadrato cose diverse, alle volte, diventano uguali:  $-2 \neq 2$  ma  $(-2)^2 = 2^2$  —, però noi non ce ne curiamo. Alla fine, separeremo il grano dal loglio controllando quali delle soluzioni trovate soddisfanno l'equazione originale.

$$x^2(2x^2-4x+4) = (x-1)^2(2x^2+8)$$

$$\cancel{2}x^4 - \cancel{4}x^3 + 4x^2 = \cancel{2}x^4 - \cancel{4}x^3 + 10x^2 - 16x + 8$$

$$6x^2 - 16x + 8 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Facciamo la verifica

$$f'(2) = 1 + 1 = 2 \quad \times \text{ soluzione spuria}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \checkmark \text{ punto stazionario}$$

La funzione  $f$  ha quindi il solo punto stazionario  $x = \frac{2}{3}$ , che ovviamente è il minimo cercato, per cui  $C$  è  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . Per averne una verifica completamente formale notiamo che il segno della derivata è negativo prima di  $\frac{2}{3}$  e positivo dopo.

Questo si verifica facilmente perché, siccome  $\frac{2}{3}$  è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima ed in un punto arbitrario dopo.

Abbiamo già visto che  $f'(2) = 2 > 0$ . Per il prima  $f'(0) = -1 < 0$ . Questi segni della derivata implicano che  $f(x)$  è decrescente prima di  $\frac{2}{3}$  e crescente dopo, quindi assume in  $\frac{2}{3}$  il valore minimo.

fine L. 22