

Questo si verifica facilmente perché, siccome $\frac{2}{3}$ è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima ed in un punto arbitrario dopo.

Abbiamo già visto che $f'(2) = 2 > 0$. Per il prima $f'(0) = -1 < 0$. Questi segni della derivata implicano che $f(x)$ è decrescente prima di $\frac{2}{3}$ e crescente dopo, quindi assume in $\frac{2}{3}$ il valore minimo.

fine L. 22

Esercizio Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^3 - x + k = 0$ ha una soluzione positiva?

Soluzione: riscriviamo l'equazione nella forma

$$\underbrace{-x^3 + x}_{f(x)} = k$$

l'esercizio chiede: per quali k il grafico di $f(x)$ interseca la retta $y=k$ in un punto di ascissa positiva?

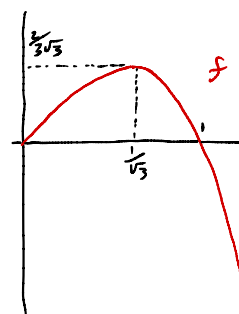
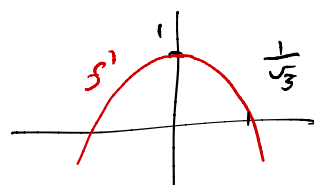
Sfruttiamo la derivata $f'(x) = -3x^2 + 1$ per studiare il grafico di $f(x)$. Siccome ci

interessano le x positive, osserviamo che:

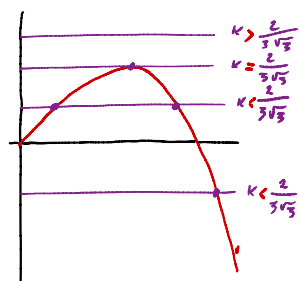
• per $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ è crescente

• per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) = 0$

• per $\frac{1}{\sqrt{3}} < x$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ è decrescente



Inoltre, siccome il coefficiente di grado massimo è negativo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ossia f scende sotto qualsiasi soglia fissata.

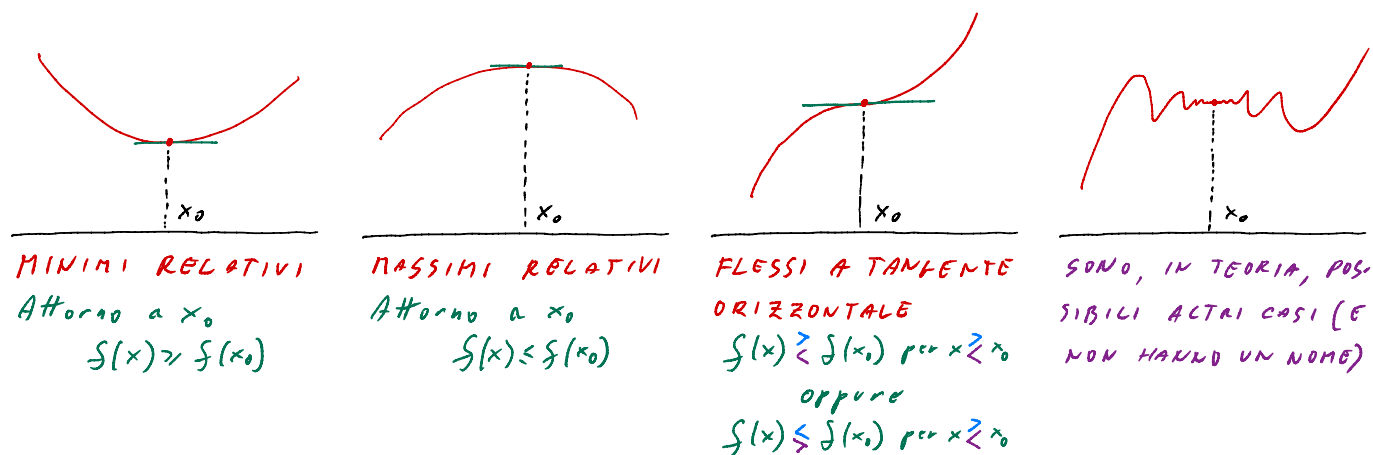


Il grafico così ottenuto mostra che la retta $y=k$ interseca $y=f(x)$ in un $x > 0$ quando $k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Di conseguenza, l'equazione data ha una soluzione positiva se e solo se

$k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Classificazione dei punti stazionari

I punti stazionari di $f(x)$, ossia quelli in cui $f'(x) = 0$, sono classificati in quattro categorie:



Principalmente, si tratta di nomenclatura, ma questa classificazione può anche venire in aiuto quando si vuole disegnare il grafico di una funzione.

Procedura per classificare un punto stazionario x_0

1. calcolo $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ partendo dalla prima derivata $\neq 0$.
2. se questa è la derivata n -esima ($f^{(n)}(x_0) \neq 0$) allora:
 - n è dispari $\Rightarrow$ FLESSO
 - n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ MINIMO REL.
 - n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ MASSIMO REL.

Per esempio se la derivata seconda è positiva, $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un MINIMO RELATIVO, se la derivata seconda è negativa $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un MASSIMO RELATIVO.

