

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è un'equazione funzionale* che coinvolge una funzione incognita $f(x)$ e le sue derivate.

* un'equazione funzionale è un'equazione la cui incognita non è un singolo numero bensì un'intera funzione.

Esempio: l'esercizio C che abbiamo appena risolto:

$$x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

Tutti i polinomi $f(x) = ax^3 + x^2$ risolvono l'equazione

Verifica (del fatto che $f(x)$ risolve l'equazione)

Basta sostituire $f(x)$ nei due membri e constatare che si ottiene un'identità

$$\begin{aligned} x^2 + x \cdot (ax^3 + x^2)' &\stackrel{?}{=} 3 \cdot (ax^3 + x^2) \\ x^2 + x \cdot (3ax^2 + 2x) &\stackrel{?}{=} 3ax^3 + 3x^2 \\ \cancel{x^2} + \cancel{3ax^3} + \cancel{2x^2} &\stackrel{?}{=} \cancel{3ax^3} + \cancel{3x^2} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Inoltre si potrebbe dimostrare che non ci sono altre soluzioni. L'espressione $f(x) = ax^3 + x^2$ — che rappresenta una famiglia di funzioni parametrizzata da a — è, quindi, detta soluzione generale dell'equazione.

La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni, ciascuna delle quali è una soluzione particolare. Per esempio, l'esercizio D chiedeva di trovare la soluzione particolare tale che $f(1) = 0$.

Integrali indefiniti

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = x^4$. Potremmo notare che $(x^5)' = 5x^4$, quindi $(\frac{1}{5}x^5)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$, e, di conseguenza, $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ è una soluzione particolare della nostra equazione. Ricordando che la derivata di una costante è nulla, vediamo che qualunque funzione del tipo $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$ è una soluzione, questa è infatti la soluzione generale di $f'(x) = x^4$.

In generale l'equazione $f'(x) = g(x)$, con $g(x)$ una funzione fissata — ne abbiamo appena visto un esempio con la funzione $g(x) = x^4$ — è così importante che c'è un simbolo apposta per indicare la sua soluzione generale:

$$\int g(x) dx \quad \text{letto: "integrale di } g(x) \text{ in } dx"$$

Per cui, tornando all'esempio $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Detto altrimenti: $\int g(x) dx$ è la famiglia di quelle funzioni $f(x)$ tali che $f'(x) = g(x)$. Queste funzioni, che sono le soluzioni particolari di $f' = g$, si chiamano anche primitive di g .

Data una primitiva $f(x)$ di $g(x)$, tutte le funzioni del tipo $f(x) + C$ sono, a loro volta, primitive di $g(x)$, e si può dimostrare che non ce ne sono altre. Quindi,

$$\underline{\int g(x) dx = f(x) + C} \quad \text{con } \underline{f(x)} \text{ una qualunque primitiva di } \underline{g(x)}.$$

Integrali delle funzioni elementari

FORMULE DA SAPERE

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad \text{per } a \neq -1 \quad \leftarrow \text{In particolare}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x) + C \quad \leftarrow \text{caso } a = -1 \text{ del precedente}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

Regole di integrazione

- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ formula $\int x^a dx$

es $\int 2 \cdot x^2 dx = 2 \cdot \int x^2 dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = \frac{2}{3} x^3 + \underline{2C}$

Siccome la costante di integrazione C rappresenta "un numero qualunque", anche il $+2C$ che abbiamo ottenuto è semplicemente un numero qualunque. Quindi siamo giustificati a scrivere

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 + \underline{C}$$

- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ $\int -1 \cdot \sin(x) dx = -1 \cdot \int \sin(x) dx$

es $\int x - \sin(x) dx = \int x dx + \int -\sin(x) dx = \int x dx - \int \sin(x) dx =$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 + \underline{C_1} \right) - \left(-\cos(x) + \underline{C_2} \right) = \frac{1}{2} x^2 + \cos(x) + \underline{C_1 - C_2}$$

sono due integrali separati,
e ciascuno ha la sua costante

Ora si ripete il discorso della costante di integrazione.

Siccome $C_1 - C_2$ è semplicemente un numero qualunque (scritto in maniera fantasiosa) siamo giustificati a chiamarlo C .

$$\int x - \sin(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x) + C$$

Da notare che se anziché C_1 e C_2 avessimo scritto solo C e C al posto di $C_1 - C_2$ ci sarebbe venuto $\cancel{C} - \cancel{C}$ e avremmo ottenuto un risultato sbagliato (senza costante di integrazione).

Nota la costante di integrazione conduce a discorsi un po' complicati, però, essenzialmente, è solo burocrazia. Alla fine otterremo sempre un risultato del tipo $\int \text{funzione } dx = \text{primitiva} + C$

All'atto pratico, non serve mai, anzi, al di fuori di un corso di matematica, sarebbe goffo scrivere discorsi del genere.

(Potrebbe essere apprezzato, però, che non scriviate cose false tipo $x^2 = x^2 + C$)

Rispetto alle derivate, gli integrali sono più complicati per via di un guaio: non esiste una regola per $\int f(x) \cdot g(x) dx$. Ci sono, tuttavia, due regole che, talvolta, ossia solo in determinate circostanze, permettono di calcolare integrali di questo tipo:

- la regola di sostituzione
- la regola di integrazione per parti

Anche queste non sono che l'inizio, e si potrebbe dire molto e molto ancora, ma sarebbe oltre gli scopi di questo corso.

Regola di sostituzione

$$\text{Se } \int f(y) dy = F(y) + C$$

$$\text{allora } \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

es. Calcolare $\int x \cdot \sin(x^2) dx$

Soluzione Usando la regola con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$

$$\int f(y) dy = \int \sin(y) dy = -\cos(y) + C$$

quindi prendiamo $F(y) = -\cos(y)$

$$\int \sin(x^2) \cdot 2x dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = -\cos(x^2) + C$$

Per risalire all'integrale cercato basta quindi moltiplicare e dividere per 2

$$\boxed{\int x \cdot \sin(x^2) dx} = \int \frac{1}{2} \sin(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx =$$

(ricordando le solite considerazioni su C) $\rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \cos(x^2) + C}$

es. Calcolare $\int \cos(x+1) dx$

Soluzione Usiamo $f(y) = \cos(y)$ e $g(x) = x+1$.

$$\int f(y) dy = \sin(y) + C \text{ quindi } F(y) = \sin(y), \text{ inoltre } g'(x) = 1$$

$$\text{Quindi } \boxed{\int \cos(x+1) dx} = \int \cos(x+1) \cdot 1 dx = \boxed{\sin(x+1) + C}$$

Verifica della regola di sostituzione

Dobbiamo controllare che la derivata di $F(g(x)) + C$ sia la funzione integranda.

$$(F(g(x)) + C)' = \underline{F}'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = \underline{f}(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F' = f \text{ poich\u00e9 } \int f(x) dx = F(x) + C$$



Caso particolare della regola di sostituzione

Il caso seguente si presenta con grande frequenza, per cui conviene tenere a mente la formula (*).

$$\text{Se } \int f(y) dy = F(y) + C$$

$$\text{allora } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (*)$$

Infatti, usando la regola con $g(x) = ax+b$, otteniamo

$$\int f(ax+b) dx = \int \frac{1}{a} \cdot a f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int g'(x) f(g(x)) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

es Calcolare $\int \frac{1}{2x+3} dx$

Soluzione Usando la formula con $f(y) = \frac{1}{y}$ otteniamo

$$\int f(y) dy = \int \frac{1}{y} dy = \log_e(y) + C \quad \text{quindi } F(y) = \log_e(y)$$

ora abbiamo $a=2$ e $b=3$ (siccome vogliamo $2x+3 = ax+b$)

$$\text{allora } \boxed{\int \frac{1}{2x+3} dx} = \int f(2x+3) dx = \boxed{\frac{1}{2} \log_e(2x+3) + C}$$

es. Calcolare $\int 7^x dx$

Soluzione

Per applicare la regola conviene ricordare che $7^x = e^{x \cdot \log_e(7)}$

applicando la formula per $f(y) = e^y$, $a = \log_e(7)$ e $b=0$

$$\boxed{\int 7^x dx} = \int e^{x \cdot \log_e(7)} dx = \frac{1}{\log_e(7)} e^{x \cdot \log_e(7)} + C = \boxed{\frac{1}{\log_e(7)} \cdot 7^x + C}$$

fino 1.24

