

Dagli esercizi di preparazione al test

84) $\int \sin(2x) + x^2 dx =$

$$= \underbrace{\int \sin(2x) dx}_{-\frac{1}{2} \cos(2x)^*} + \underbrace{\int x^2 dx}_{\frac{1}{3} x^3} = \boxed{-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{3} x^3 + C}$$

85) $\int e^{3x} - \cos(1-x) dx =$

$$= \underbrace{\int e^{3x} dx}_{\frac{1}{3} e^{3x}^*} - \underbrace{\int \cos(1-x) dx}_{-\sin(1-x)^*} = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} + \sin(1-x) + C}$$

86) $\int \frac{x-1}{x} dx =$

$$= \int 1 - \frac{1}{x} dx = \underbrace{\int 1 dx}_x - \underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{\log_e x} = \boxed{x - \log_e(x) + C}$$

Nota: $\int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C = x + C$

Più in generale $\underline{\int k dx = k \cdot x + C}$

88) Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$

$$\int e^{2+3x} dx = \frac{1}{3} e^{2+3x} + C^* \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{3} e^{2+3x}}$$

* Formula $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

89 Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt[3]{3x} dx &= \int 2\sqrt[3]{3} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= 2\sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \cdot x^{1+\frac{1}{3}} + C = \boxed{\frac{2\sqrt[3]{3}}{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C}\end{aligned}$$

90 Calcola la soluzione generale dell'equazione

$$f'(x) = x^3 + \cos(x)$$

$$\int x^3 + \cos(x) dx = \underbrace{\int x^3 dx}_{\frac{1}{4}x^4} + \underbrace{\int \cos(x) dx}_{\sin(x)} = \boxed{\frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + C}$$

Regola di integrazione per parti:

$$\text{Se } \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\text{allora } \int \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{la } f \text{ si integra} \uparrow}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{la } g \text{ si deriva} \downarrow}} dx = \underbrace{F(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{da non confondersi con } +}} \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx$$

es. Calcoliamo $\int x \cdot \sin(x) dx$

La difficoltà nell'applicare la formula per parti risiede nella scelta di quale parte debba giocare il ruolo di f e quale di g . Supponiamo di scegliere $f(x) = x$ e $g(x) = \sin(x)$. Otteniamo $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ quindi

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cos(x) dx$$

Questa formula non è sbagliata, però siamo caduti dalla padella nella brace, perché adesso dobbiamo calcolare $\int \frac{1}{2} x^2 \cos(x) dx$, che è più complicato dell'integrale di partenza. *Non abbiamo scelto f e g in maniera saggia.* Proviamo di nuovo. Questa volta scegliamo

$f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x$. Così $F(x) = -\cos(x)$, $g'(x) = 1$, e

$$\boxed{\int x \cdot \sin(x) dx} = -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx = \boxed{-x \cos(x) + \sin(x) + C}$$

Suggerimento: è facile commettere errori di calcolo negli integrali, per cui conviene spesso verificare il risultato calcolandone la derivata.

derivata = funzione integranda $\rightarrow$ OK

$$(-x \cos(x) + \sin(x) + C)' = -\cancel{\cos(x)} + x \sin(x) + \cancel{\cos(x)} + 0 = x \sin(x)$$

es. Calcolare $\int x^2 e^x dx$

In modo simile all'esercizio precedente, conviene derivare la parte x^2 e integrare la parte e^x . L'idea è che derivando x^2 otteniamo una potenza di x minore, $2 \cdot x^1$, quindi, in qualche senso, il problema si semplifica.

Scegliamo $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, chiaramente $F(x) = e^x$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (*)$$

Non abbiamo risolto l'esercizio, ma ci siamo ricondotti a calcolare $\int x e^x dx$, che verosimilmente è più facile perché la x compare alla prima anziché al quadrato. Insistiamo quindi con la formula per parti ($f(x) = e^x$, $g(x) = x$)

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Sostituendo in (*) $-2 \int x e^x dx$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x - 2C$$

e, per la solita considerazione, possiamo scrivere

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

Es Calcolare $\int \log_e(x) dx$

A prima vista, la funzione integranda non ha l'aspetto di un prodotto $f(x) \cdot g(x)$. C'è però, un trucco: $\log_e(x) = 1 \cdot \log_e(x)$.

Scegliamo quindi $f(x) = 1$ e $g(x) = \log_e(x)$, allora $F(x) = x$

$$\boxed{\int \log(x) dx = x \cdot \log_e(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log_e(x) - x + C}$$

Giustificazione della formula di integrazione per parti

Calcoliamo la derivata del membro di destra

$$\begin{aligned} (F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx)' &= (F(x) \cdot g(x))' - (\int F(x) g'(x) dx)' = \\ &= \underbrace{f(x)}_{=f(x) \text{ perché } \int f(x) dx = F(x) + C} \cdot g(x) + F(x) \cdot \underbrace{g'(x)}_{=F(x) \cdot g'(x) \text{ per definizione}} - F(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$$= F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot \cancel{g'(x)} - F(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x)$$

il risultato è la funzione integranda. $\square$

Es Calcolare $\int 2 \sin(x) \cos(x) dx$

metodo 1 Applichiamo la formula di sostituzione con

$f(y) = 2y$ e $g(x) = \sin(x)$, quindi $\int f(y) dy = 2 \cdot \frac{1}{2} y^2 + C$, $F(y) = y^2$

$$\boxed{\int 2 \sin(x) \cos(x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx = (\sin(x))^2 + C}$$

metodo 2 Ricordiamo che $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, quindi

$$\boxed{\int 2\sin(x)\cos(x) dx} = \int \sin(2x) dx = \boxed{-\frac{1}{2}\cos(2x) + C}$$

Come è possibile che, calcolando il medesimo integrale in due maniere diverse, siamo pervenuti a due risultati differenti?

Intanto, possiamo riscrivere il secondo risultato usando la formula di duplicazione per il coseno $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$

$$\int 2\sin(x)\cos(x) dx = -\frac{1}{2}(1 - 2(\sin(x))^2) + C = (\sin(x))^2 - \frac{1}{2} + C$$

Ora si vede bene che il secondo risultato è uguale al primo salvo che la costante C è rimpiazzata da $-\frac{1}{2} + C$. I due risultati sono quindi identici — rappresentano la stessa famiglia di funzioni — e non differiscono che per il modo in cui sono scritti.

fine l. 25