

metodo 2 Ricordiamo che $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, quindi

$$\boxed{\int 2\sin(x)\cos(x) dx = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C}$$

Come è possibile che, calcolando il medesimo integrale in due maniere diverse, siamo pervenuti a due risultati differenti?

Intanto, possiamo riscrivere il secondo risultato usando la formula di duplicazione per il coseno $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$

$$\int 2\sin(x)\cos(x) dx = -\frac{1}{2}(1 - 2(\sin(x))^2) + C = (\sin(x))^2 - \frac{1}{2} + C$$

Ora si vede bene che il secondo risultato è uguale al primo salvo che la costante C è rimpiazzata da $-\frac{1}{2} + C$. I due risultati sono quindi identici — rappresentano la stessa famiglia di funzioni — e non differiscono che per il modo in cui sono scritti.

fine l. 25

Eg. Calcolare $\int x \cdot 7^x dx$

metodo 1 (per parti). $f(x) = 7^x$, $g(x) = x$.

$$\int 7^x dx = \frac{7^x}{\log_e(7)} + C$$

$$\int x \cdot 7^x dx = \frac{7^x}{\log_e(7)} x - \int \frac{7^x}{\log_e(7)} dx = \boxed{\frac{x \cdot 7^x}{\log_e(7)} - \frac{7^x}{(\log_e(7))^2} + C}$$

metodo 2 (per sostituzione) $\int y \cdot e^y dy = (y-1)e^y + C$

$$y = ax + b = \log_e(7) \cdot x$$

$$\int \log_e(7) \cdot x \cdot \underbrace{e^{\log_e(7) \cdot x}}_{7^x} dx = \frac{1}{\log_e(7)} (\log_e(7) \cdot x - 1) \underbrace{e^{\log_e(7) \cdot x}}_{7^x} + C$$

$$\int x \cdot 7^x dx = \int \frac{1}{\log_e(7)} \cdot \log_e(7) \cdot x \cdot 7^x dx = \boxed{\frac{\log_e(7) \cdot x - 1}{(\log_e(7))^2} \cdot 7^x + C}$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Già sappiamo la soluzione generale di questa equazione nel caso $a=0$. Infatti abbiamo $f'(x) = b$ e

$$f(x) = \int b \, dx = b x + C$$

Se $a \neq 0$, aiuta ricordare il caso particolare $b=0$:

$$f(x) = C \cdot e^{ax}$$

Verifica: $f'(x) = C \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot C \cdot e^{ax} = a \cdot f(x)$ $\square$

Trucco per ricordare la soluzione: basta ricordare che f è una funzione esponenziale. Scrivendo un esponenziale generico $f(x) = \alpha \cdot e^{\beta x}$ otteniamo $f'(x) = \alpha \beta e^{\beta x}$ quindi $\alpha \beta e^{\beta x} = f'(x) = a f(x) = \alpha a e^{\beta x}$ e $\beta = a$, mentre non vi sono condizioni su α . Quindi la soluzione generale è $f(x) = \alpha \cdot e^{ax}$.

Nel caso generale, sempre assumendo $a \neq 0$, abbiamo

$$f(x) = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Metodo per ricavare questa soluzione

- Si parte dall'equazione omogenea associata $f' = a f$ (ottenuta cancellando il $+b$). Abbiamo già visto che la soluzione generale di questa è $f(x) = C \cdot e^{ax}$.
- Si cerca una soluzione particolare dell'equazione data. Per esempio possiamo cercarla costante, $f(x) = k$, da

cui $0 = f'(x) = a \cdot k + b$, $k = -\frac{b}{a}$, $f(x) = -\frac{b}{a}$.

- La soluzione generale dell'equazione data si ottiene sommando la soluzione particolare trovata, alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Verifica della soluzione generale

$$f'(x) = \left(C e^{ax} - \frac{b}{a} \right)' = C \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$a f(x) + b = a \cdot C e^{ax} - \cancel{a} \frac{b}{\cancel{a}} + b = a \cdot C \cdot e^{ax} \quad \square$$

Esercizio: Un corpo si muove lungo l'asse x . Al tempo $t=0$ esso si trova in $x=0$ ^A e ha velocità $\frac{dx}{dt}=1$ ^B. Ad ogni istante il corpo è sottoposto ad una accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ ^C (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t ?

Soluzione

In questo esercizio, t , il tempo, è la variabile indipendente, mentre x , la posizione, dipende da t , possiamo quindi scrivere $x(t)$ per la posizione, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ per la velocità e $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ per l'accelerazione. Scriviti così, i dati dell'esercizio sono:

$$(a) \ x(0) = 0 \quad (b) \ x'(0) = 1 \quad (c) \ x''(t) = -x'(t)$$

Per affrontare l'equazione (c) conviene introdurre una nuova funzione: $v(t) := x'(t)$. In questo modo $v'(t) = x''(t)$ e l'equazione diventa

$$v'(t) = -v(t)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, la cui soluzione generale è $v(t) = C \cdot e^{-t}$.
Ci resta da trovare $x(t)$. Siccome $x'(t) = v(t) = C \cdot e^{-t}$,
$$x(t) = \int C \cdot e^{-t} dt = -C e^{-t} + D \leftarrow D \text{ perché } C \text{ è già usata.}$$

Questa è la soluzione generale dell'equazione (c). Per trovare la soluzione particolare che rappresenta la legge del moto del corpo dato, dobbiamo determinare le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B).

$$0 \stackrel{(A)}{=} x(0) = -C e^{-0} + D = D - C \Rightarrow D = C$$

$$1 \stackrel{(B)}{=} x'(0) = v(0) = C \cdot e^{-0} = C \Rightarrow C = 1$$

Quindi, in definitiva $\boxed{x(t) = 1 - e^{-t}}$.

Osservazione L'equazione (c) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda, si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di una equazione dell' n -esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri; ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n -esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = a f'(x) + b f(x) + c$$

① Soluzione dell'omogenea: $f''(x) = a f'(x) + b f(x)$.

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\lambda x}$.

Mettiamo $f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ nell'equazione.

$$\cancel{\lambda^2 \cdot e^{\lambda x}} = f''(x) = a f'(x) + b f(x) = a \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni λ_1 e λ_2 , e la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$.
- Se $\Delta = 0$, l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione λ , e la soluzione generale è $f(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$.
- Se $\Delta < 0$ la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = e^{\frac{a}{2}x} \cdot (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$ con $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

② Soluzione particolare.

- Se $c = 0$, $f(x) = 0$ è una soluzione particolare.
- Se $b \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{b}$ è una soluzione particolare.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{a}x$ è una soluzione part.
- Se $b = a = 0$, $f(x) = \frac{c}{2}x^2$ è una soluzione particolare.

③ La soluzione generale si ottiene sommando una soluzione particolare e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Non è importante che si sappia a memoria il metodo per risolvere questo tipo di equazioni. È importante sapere che le soluzioni hanno, in generale, comportamenti esponenziali e oscillanti variamente combinati (a seconda dei coefficienti). Ed è importante sapere (libro o appunti alla mano) come applicare il metodo.

Eg. $f'' = 3f' - 2f$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2 - soluzione particolare: $C = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

3 - $\boxed{f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$

Eg. $f'' = 2f' - 2f + 6$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0$

$$f(x) = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = 3$

3 - $\boxed{f(x) = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + 3}$

Eg. $f'' = 2f' - f - 7$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$$f(x) = e^x (C_1 x + C_2)$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = -7$

3 - $\boxed{f(x) = e^x (C_1 x + C_2) - 7}$

E5 $f'' = f' + 1$

1 - omogenea: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = -x$

3 - $\boxed{f(x) = C_1 + C_2 e^x - x}$

Esercizio: Verifica ciascuna delle soluzioni date negli esempi precedenti calcolando i due membri dell'equazione.

Possiamo ripetere l'esercizio seguente, sfruttando, questa volta l'equazione del secondo ordine

Esercizio: Un corpo si muove lungo l'asse x . Al tempo $t=0$ esso si trova in $x=0$ e ha velocità $\frac{dx}{dt}=1$. Ad ogni istante il corpo è sottoposto ad una accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t ?

Soluzione

La funzione incognita è $x(t)$. Dobbiamo risolvere la equazione $x''(t) = -x'(t)$. Questa equazione è omogenea, ossia non c'è il termine noto, dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado $\lambda^2 + \lambda = 0$. Otteniamo $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, quindi $x(t) = C_1 e^{-1 \cdot t} + C_2 e^{0 \cdot t} = C_1 e^{-t} + C_2$. Proseguiamo, ora, come nella soluzione precedente per trovare C_1 e C_2 .
fine 1.26

