

## Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono *a variabili separabili* le equazioni della forma

$$f'(x) = g(x) \cdot h(f(x))$$

in cui  $f$  è la funzione incognita, mentre  $g$  e  $h$  sono funzioni dato. Queste equazioni si possono risolvere con un trucco che non è formalmente ineccepibile, ma funziona.

① Scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{df}{dx} = g(x) \cdot h(f)$$

② Riordiniamo i termini dell'equazione

$$\frac{df}{h(f)} = g(x) dx$$

③ Calcoliamo l'integrale indefinito di ambo i membri

$$A(f) + C_1 = \int \frac{df}{h(f)} = \int g(x) dx = B(x) + C_2$$

④ Raccogliamo le costanti  $C_1$  e  $C_2$  in  $C := C_2 - C_1$

$$A(f) = B(x) + C$$

⑤ Ricaviamo  $f$  da quest'ultima equazione.

Così troviamo una famiglia di funzioni, dipendente dal parametro  $C$ , e questa è la soluzione generale.

Eg.  $f' = 3 \times f$

1 -  $\frac{df}{dx} = 3 \times f$

2 -  $\frac{df}{f} = 3 \times dx$

3 -  $\int \frac{df}{f} = \int 3 \times dx$

$$\log_e(f) + C_1 = \frac{3}{2} x^2 + C_2$$

4 -  $\log_e(f) = \frac{3}{2} x^2 + C$

5 -  $f = e^{\frac{3}{2} x^2 + C}$   
 $= \underbrace{e^C}_K \cdot e^{\frac{3}{2} x^2}$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$\boxed{f(x) = K \cdot e^{\frac{3}{2} x^2}}$$

Verifica della soluzione

$$f'(x) = K \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot e^{\frac{3}{2} x^2} = K 3x e^{\frac{3}{2} x^2} = 3 \times K e^{\frac{3}{2} x^2} = 3 \times f(x)$$

Eg.  $x'(t) = \frac{3 \times(t)}{t}$

1 -  $\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{t}$

2 -  $\frac{dx}{x} = 3 \frac{dt}{t}$

3 -  $\int \frac{dx}{x} = \int 3 \frac{dt}{t}$

$$\log_e(x) + C_1 = 3 \log_e(t) + C_2$$

4 -  $\log_e(x) = 3 \log_e(t) + C$

5 -  $x = e^{3 \log_e(t) + C}$

$$= \underbrace{e^C}_K \underbrace{e^{3 \log_e(t)}}_{t^3} = K t^3$$

Quindi

$$\boxed{x(t) = K t^3}$$

Esercizio: verifica la soluzione precedente

## Integrali definiti

Se  $\int f(x) dx = F(x) + C$  definiamo la seguente notazione

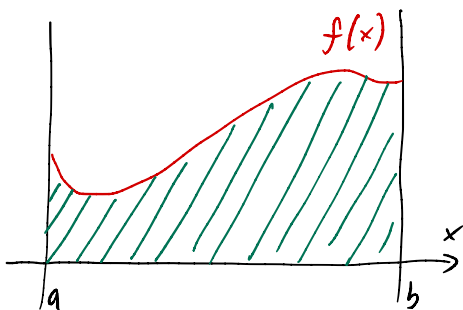
$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a) = \underbrace{[F(x)]_a^b}_{\text{maniera buffa di scrivere } F(b) - F(a)}$$

*numeri chiamati "estremi di integrazione"*

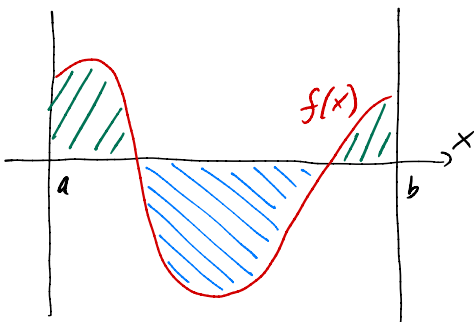
si legge "integrale da a a b di  $f(x)$  in  $dx$ "

### Teorema fondamentale del calcolo integrale

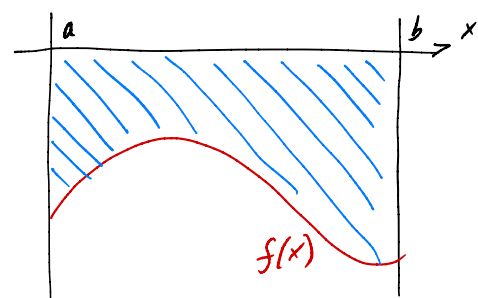
$\int_a^b f(x) dx$ , con  $a \leq b$ , è l'area della superficie di piano compresa fra il grafico di  $f(x)$  e l'asse  $x$ , fra l'ascissa  $x=a$  e l'ascissa  $x=b$ , contata positivamente nel semipiano superiore e negativamente nel semipiano inferiore.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(\text{green shaded area})$$



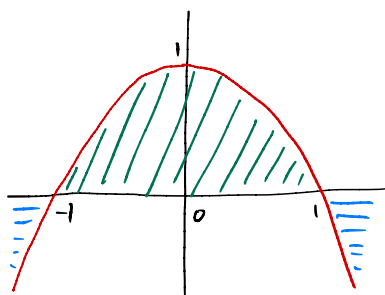
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(\text{green}) - \text{Area}(\text{blue})$$



$$\int_a^b f(x) dx = -\text{Area}(\text{blue shaded area})$$

Se  $b < a$ ,  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  *"si invertono gli estremi cambiando segno all'integrale"*

Eg. Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra il grafico di  $f(x) = 1 - x^2$  e l'asse  $x$ .



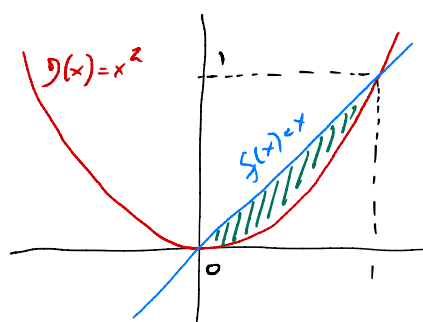
Soluzione L'area richiesta è quella tratteggiata in verde . Nel grafico è possibile identificare anche altre aree (tratteggiate in blu ) ma queste non sono limitate, quindi non è a queste che si riferisce il testo.

Applicando il teorema fondamentale del calcolo

$$\int 1 - x^2 dx = x - \frac{1}{3} x^3 + C$$

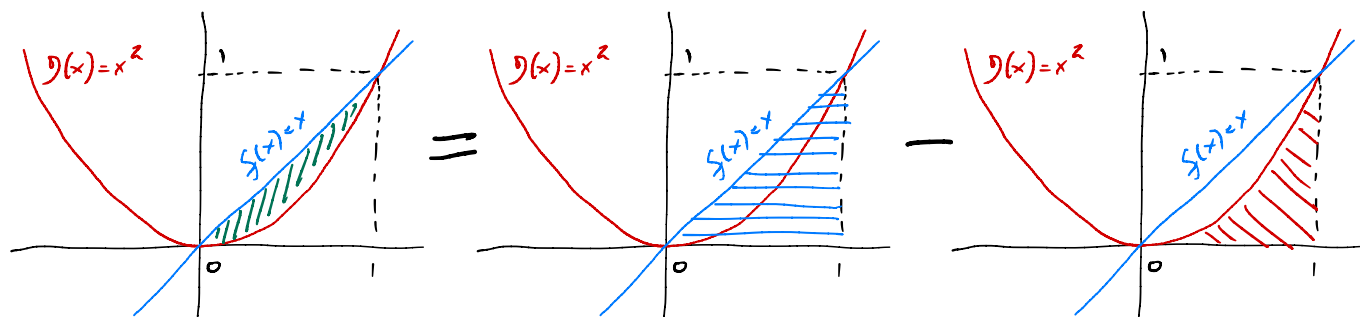
$$\boxed{\text{Area}(\text{green hatched})} = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx \stackrel{H}{=} \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Eg. Calcolare l'area della regione limitata compresa fra i grafici di  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$ .



Soluzione L'area in questione è quella tratteggiata in verde  nella figura. Siccome il teorema fondamentale del calcolo non è applicabile direttamente

a questa situazione, scomponiamo l'area  in una differenza di due aree più semplici.



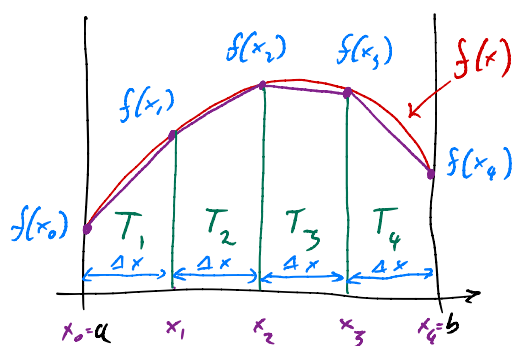
$$\begin{aligned}
 \boxed{\text{Area}(\text{green box})} &= \text{Area}(\text{blue box}) - \text{Area}(\text{red box}) \\
 &= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \\
 &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \\
 &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}
 \end{aligned}$$

### Calcolo numerico di integrali

fine l. 27

Il teorema fondamentale del calcolo ci permette di dare un senso anche a quegli integrali che non riusciamo a calcolare in forma chiusa — e ce ne sono che non si possono proprio calcolare mediante una formula, per esempio  $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$ .

Sfruttando la connessione fra integrale e area, possiamo approssimare numericamente un integrale stimando il valore dell'area che esso rappresenta.



Per esempio, supponiamo di voler calcolare  $\int_a^b f(x) dx$ . Potremmo approssimare il grafico di  $f(x)$  con la spezzata in viola nel disegno. L'area

sotto questa spezzata, che sarà la nostra stima dell'integrale, è la somma delle aree dei trapezi  $T_1, T_2, T_3$  e  $T_4$  (le cui basi sono disposte in verticale).