

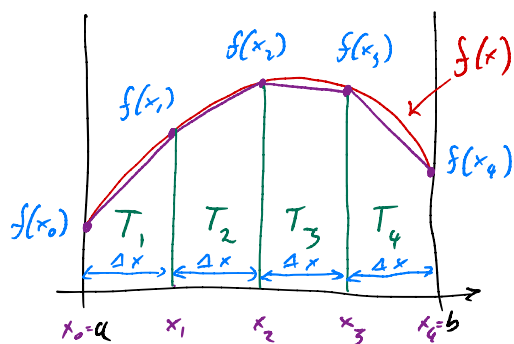
$$\begin{aligned}
\boxed{\text{Area}(\text{green box})} &= \text{Area}(\text{blue box}) - \text{Area}(\text{red box}) \\
&= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \\
&= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Calcolo numerico di integrali

fine l. 27

Il teorema fondamentale del calcolo ci permette di dare un senso anche a quegli integrali che non riusciamo a calcolare in forma chiusa — e ce ne sono che non si possono proprio calcolare mediante una formula, per esempio $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Sfruttando la connessione fra integrale e area, possiamo approssimare numericamente un integrale stimando il valore dell'area che esso rappresenta.



Per esempio, supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x) dx$. Potremmo approssimare il grafico di $f(x)$ con la spezzata in viola nel disegno. L'area

sotto questa spezzata, che sarà la nostra stima dell'integrale, è la somma delle aree dei trapezi T_1, T_2, T_3 e T_4 (le cui basi sono disposte in verticale).

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(T_1) &= \text{Area} \left(\text{trapezoid with bases } f(x_0) \text{ and } f(x_1) \text{ and height } \Delta x \right) = \text{Area} \left(\text{trapezoid with bases } \Delta x \text{ and } f(x_1) \text{ and height } f(x_0) \right) = \\
 &= \frac{\text{base}_1 + \text{base}_2}{2} \cdot \text{altezza} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x
 \end{aligned}$$

Alla stessa maniera $\text{Area}(T_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x$ etc.

Quindi, mettendo insieme queste formule

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(\text{spezzata}) &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Delta x + \\
 &\quad + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \Delta x + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \Delta x = \\
 &= \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Ora, abbiamo usato solo quattro trapezi, ma questo è un numero troppo piccolo in pratica. Conviene generalizzare la formula ad un numero arbitrario n di trapezi. Siccome l'intervallo $[a, b]$ è diviso in n lunghezze, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Abbiamo allora la formula

$$\int_a^b f(x) \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

con $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2 \cdot \Delta x$, $x_3 = a + 3 \cdot \Delta x$, ..., $x_n = b$.

Chiaramente più grande sarà il numero n dei trapezi, migliore sarà l'approssimazione così ottenuta.

E5 è facile calcolare che $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.67$ (salvo per esercizio). Facciamo però finta di non saper fare questo calcolo, e troviamo un'approssimazione col metodo dei trapezi.

Uteremo $n=4$ trapezi, quindi $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0.5$. Gli altri dati sono: $f(x) = x^2$, $a=0$, $b=2$.

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 0.25$	$f(x_2) = 1$	$f(x_3) = 2.25$	$f(x_4) = 4$

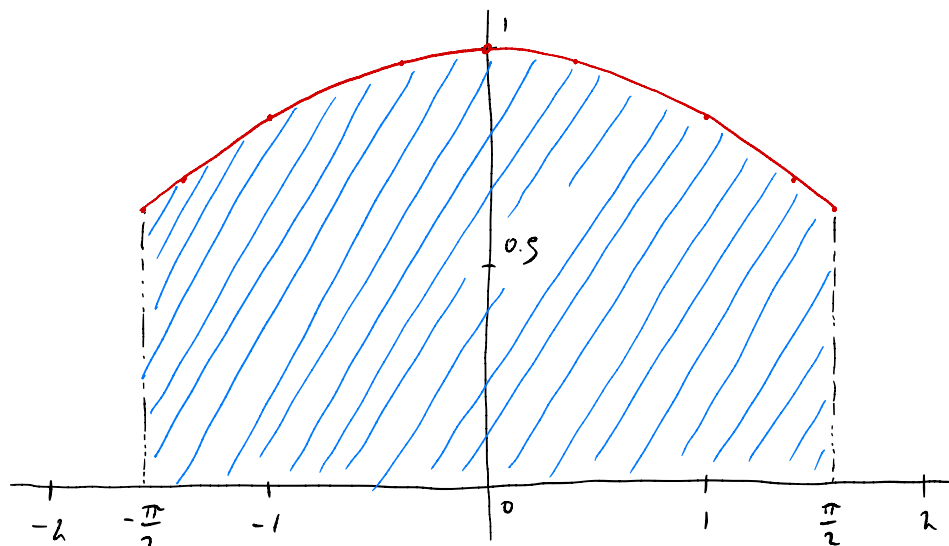
$$\int_0^2 x^2 dx \approx 0.5 \cdot \left(\frac{0}{2} + 0.25 + 1 + 2.25 + \frac{4}{2} \right) = 2.75$$

Come possiamo notare, anche con soli quattro trapezi, abbiamo ottenuto un risultato vicino al valore esatto 2.67.

Esercizio (I dal file "esercizi di analisi")

Calcola un'approssimazione numerica di: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Soluzione (non è stata illustrata a lezione)



Notiamo che l'area indicata dall'integrale è simmetrica rispetto all'asse y , ossia la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha simmetria pari — $f(-x) = f(x)$ — Quindi ci basta calcolare la metà fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, e poi moltiplicare per due.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Nota: questo passaggio non è necessario, però ci permette di ottenere il medesimo risultato facendo metà del lavoro.

Ora si presenta un nuovo guaio, che si sarebbe presentato in ogni caso: la funzione integranda non è definita in 0. La soluzione — che può essere giustificata teoricamente, ma la giustificazione esula dagli argomenti di questo corso — è di completare la funzione integranda con il suo limite nel punto in cui non è definita. Siccome vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

possiamo immaginare, allo scopo di calcolare l'integrale, che questa funzione valga 1 in $x=0$.

Procediamo ad applicare il metodo dei trapezi. Potremmo decidere di usare $n=10$, ossia 10 trapezi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$: otterremo il medesimo risultato che si avrebbe con 20 trapezi totali.

Poniamo

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad n=10 \quad \Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}}{10} \approx 0.15708$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1571	0.3142	0.4712	0.6283	0.7854	0.9425	1.0996	1.2566	1.4137	1.5708
$f(x_i)$	1	0.9959	0.9856	0.9634	0.9355	0.9003	0.8584	0.8103	0.7568	0.6986	0.6366

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2} \right)$$

≈ 1.3699 8.7212

Quindi: $\boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx 2.7399 \approx \boxed{2.74}$

Nota: il valore esatto è 2.741524...

Nota FUORI PROGRAMMA

È possibile stimare l'errore nel metodo dei trapezi mediante la formula seguente

$$\underbrace{\text{approssimazione} - \int_a^b f(x) dx}_{\text{errore}} \approx \Delta x^2 \frac{f'_b - f'_a}{12}$$

Nel nostro caso $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = 0.4053$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -0.4053$, quindi

$$\text{errore} \approx 0.1571^2 \frac{-0.4053 - 0.4053}{12} \approx -0.0017$$

Questa stima conferma che le prime due cifre decimali della nostra approssimazione sono corrette, anzi suggerisce valore esatto ≈ 2.742

Esercizio (H dal file "esercizi di analisi")

L'energia termica irradiata nell'unità di tempo da un corpo nero alla temperatura T (nella scala assoluta) è

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

dove A indica l'area della superficie del corpo e $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$.

La variazione di temperatura di una massa M di ferro è legata alla variazione di energia termica da

$$\frac{dQ}{dt} = c M \frac{dT}{dt}$$

con $c = 0.4495 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Infine la densità del Ferro è $\rho = 7.874 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Soluzione (non è stata illustrata a lezione)

Dalle due equazioni date otteniamo

$$c M \frac{dT}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sigma A}{c M} T^4$$

Chiamiamo questa costante α

$$T' = -\alpha T^4$$

Questa è un'equazione a variabili separabili; la cui soluzione generale è ALVA PRIMA SEGUENTE...

$$\int \frac{dT}{T^4} = \int -\alpha dt$$

Qui si sarebbe potuto scrivere anche $-dt+C$: i calcoli verranno diversi ma il risultato finale no.

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{T^3} = -\alpha(t+C)$$

Ricordando che la domanda è "dopo quanto tempo..." conviene ricavare t .

$$t = \frac{1}{3\alpha T^3} - C$$

Dobbiamo ora calcolare α e C . Per poter applicare $\alpha = \frac{\sigma A}{CM}$ sappiamo già σ , C e M , mentre ci manca la superficie A della sfera. Detto r il raggio e V il volume:

$$M = \rho V \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad A = 4\pi r^2$$

Da cui si deduce

$$V = \frac{M}{\rho} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \quad A = \sqrt[3]{36\pi \frac{M^2}{\rho^2}}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{\sigma A}{CM} = \frac{\sigma}{C} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{M\rho^2}} =$$

$$= \frac{5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}}{0.4495 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{36\pi}{10^3 \text{ kg} \cdot 7.874^2 \text{ g cm}^{-3}}}$$

$$= \frac{5.6704}{0.4495} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{7.874^2}} \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3} = 15.414 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3}$$

Detta $T_0 = 500 \text{ K}$ la temperatura al tempo $t=0$, possiamo calcolare C da

$$0 = \frac{1}{3\alpha T_0^3} - C \Rightarrow C = \frac{1}{3\alpha T_0^3}$$

Detta $T_1 = 10 \text{ K}$ e t il tempo cercato abbiamo

$$t = \frac{1}{3\alpha T_1^3} - C = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3} \right) = 2.1625 \cdot 10^9 \text{ s} \\ = \underline{\underline{68.53 \text{ anni}}}$$

Assumendo 1 anno = 365.25 giorni 

Esercizio (L dal file "esercizi di analisi")
(= A esame del 2.V.2019)

Considera la funzione $f(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$, dove L , k , e x_0 sono parametri fissati.

1. Verifica che la funzione data risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{k}{L} f(x)(L - f(x))$$

2. Fissa $L = 6$, $k = 0.5$, e $x_0 = 5$. Traccia il grafico di $f(x)$ per x che varia fra 0 e 10.

3. Con i parametri fissati al punto precedente, calcola precisamente il valore, se riesci, altrimenti dai una stima ragionevolmente accurata, dell'integrale $\int_0^{10} f(x) dx$.

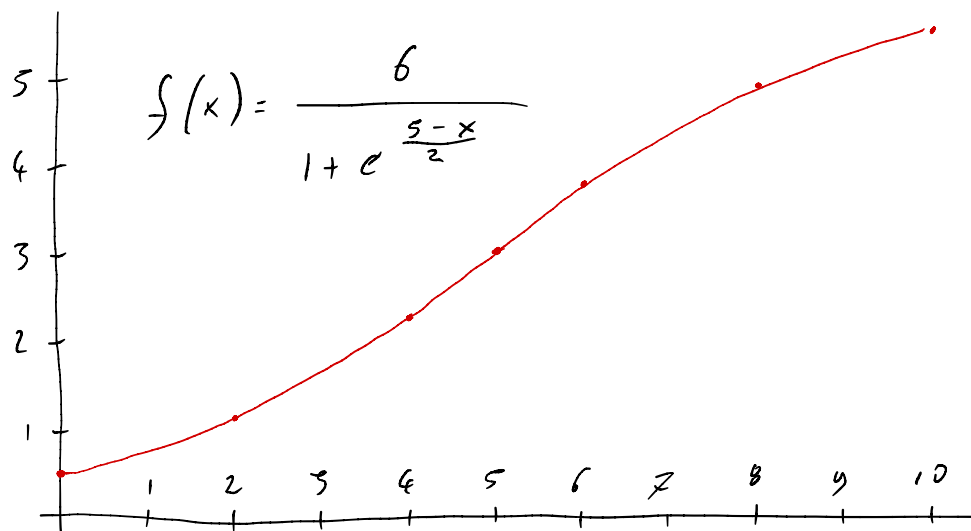
Soluzione (non è stata illustrata a lezione)

$$\textcircled{1} \quad \frac{df}{dx} = +k e^{-k(x-x_0)} \frac{+L}{(1+e^{-k(x-x_0)})^2}$$

$$\frac{k}{L} f(x)(L-f(x)) = \frac{k}{L} \frac{\cancel{L}}{1+e^{-k(x-x_0)}} \frac{L e^{-k(x-x_0)}}{1+e^{-k(x-x_0)}}$$

Le due espressioni ottenute valutando i due membri della equazione si equivalgono, quindi l'equazione è soddisfatta.

2.



3. Per applicare la definizione di integrale definito, dovremmo prima calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{6}{1 + e^{\frac{5-x}{2}}} dx$. Questo si può fare, ma non è facile usando i metodi del corso. Innanzitutto notiamo che, usando la formula $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$,^{*} possiamo ricondurci all'integrale $\int \frac{1}{1+e^x} dx$. Però, adesso, occorre, per esempio, inventarsi un trucco nifty come questo:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int 1 dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

① ②

$$\textcircled{1} \int 1 dx = x + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x dx = \log_e (1+e^x) + C$$

$f(g(x)) \cdot g'(x)$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 1+e^x$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \textcircled{1} + \textcircled{2} = x - \log_e (1+e^x) + C \quad \text{ed applicando } *$$

$$\int \frac{6}{1 + e^{\frac{5-x}{2}}} dx = 6 \int \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}} dx = 6 \cdot \frac{-12}{-2} \left(\frac{5-x}{2} - \log_e \left(1 + e^{\frac{5-x}{2}} \right) \right) + C$$

$ax+b$ $\frac{1}{a}$

Ora è facile concludere i calcoli

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(x) dx &= \left[-12 \left(\frac{5-x}{2} - \log_e \left(1 + e^{\frac{5-x}{2}} \right) \right) \right]_0^{10} \\ &= 30 + 12 \log_e \left(1 + e^{-\frac{5}{2}} \right) - \left(-30 + 12 \log_e \left(1 + e^{\frac{5}{2}} \right) \right) \\ &= 60 + 12 \log_e \left(\frac{1 + \frac{1}{e^{5/2}}}{1 + e^{5/2}} \right) = 60 + 12 \log_e \left(e^{-\frac{5}{2}} \right) = \boxed{30}\end{aligned}$$

Nota La soluzione analitica di questa domanda è un po' ostica se affrontata con la preparazione di questo corso. Tuttavia **non** è l'unica soluzione possibile. Per esempio una soluzione numerica, con il metodo dei trapezi, sarebbe interamente soddisfacente. Anzi — provare per credere — questo integrale viene esattamente 30, se calcolato col metodo dei trapezi, qualunque sia il numero di trapezi scelto.

Teoria della probabilità

La teoria della probabilità serve per quantificare i brandelli di informazione che, nell'imprevedibile, è possibile strappare dal controllo del caso. Cosa significhi "imprevedibile" è forse una questione filosofica. Noi ci limitiamo a constatare che, di frequente, è oltremodo difficile stabilire verso che futuro evolverà una situazione presente (es. il tempo atmosferico, il lancio di un dado o di una moneta). Allora, per poter dire almeno qualcosa, che sia precisa, conviene postulare l'intervento del caso e concentrarsi sulle leggi di quest'ultimo.

Il concetto di **evento** è fondamentale in teoria della probabilità: un evento è una predizione, non necessariamente veritiera. Per esempio, nel lancio di un dado, potremmo considerare gli eventi "il dado fa sei" o "fa più di due". Sono ammessi anche eventi certi "il dado fa qualche numero" ed eventi impossibili "fa nove e mezzo".

La **probabilità** di un evento è la frazione di circostanze, identiche a quelle in esame, in cui l'evento si verifica. Per esempio, siccome un dado, non truccato, è costruito per cadere su ciascuna delle sei facce $\frac{1}{6}$ delle volte, diremo che la probabilità dello

evento "il dado fa tre" è $\frac{1}{6}$.

Definizione: uno spazio degli eventi Ω è un insieme i cui elementi si dicono eventi elementari.

A ciascun evento elementare x è associata una probabilità $p(x)$ compresa fra 0 e 1, con la condizione che la somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari sia 1.

In una data circostanza, lo spazio degli eventi rappresenta il totale di tutte le informazioni probabilistiche che si possono sapere a proposito di quella circostanza.

Esempio: lancio di un dado

$$\Omega = \{ \square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \}$$

$$p(\square) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}) = \frac{1}{6}$$

Definizione: dato uno spazio degli eventi Ω , chiamiamo evento un insieme di eventi elementari; ossia un sottoinsieme di Ω . La probabilità $Pr(E)$ di un evento E è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono.

Esempio: nel caso del dado l'evento E "il risultato è dispari" è $E = \{ \square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array} \}$.

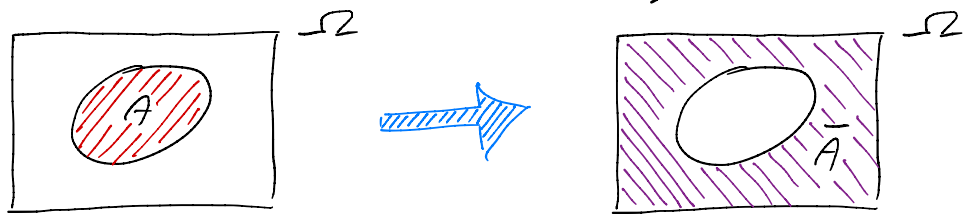
La probabilità di E è

$$Pr(E) = p(\square) + p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}) + p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Algebra di Boole degli eventi

Gli eventi, che sono sottoinsiemi di Ω si prestano ad essere manipolati per mezzo delle operazioni Booleane

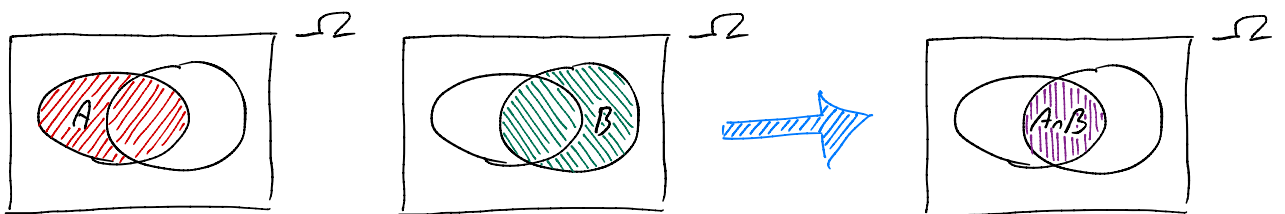
- complemento: l'evento $\bar{A}$, il "complementare di A " o anche " A complementare", è l'insieme degli eventi elementari che non appartengono ad A



$\bar{A}$ = "A non si verifica"

es. "il dado fa 1 o 2" = "il dado non fa né 3 né 4"
 $\{1, 2\}$ $\{3, 4, 5, 6\}$

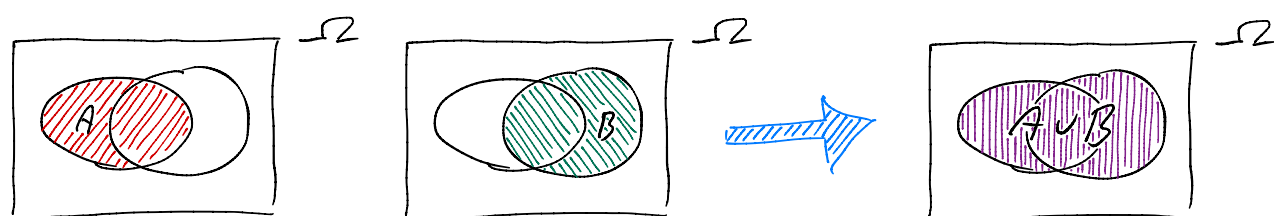
- intersezione: l'evento $A \cap B$, la "intersezione di A e B " o anche " A intersecato B ", è l'insieme degli eventi elementari che appartengono sia ad A sia a B .



$A \cap B$ = "si verificano sia A sia B " = " A e B "
 $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$

es. "il dado fa un numero dispari" $\cap$ "il dado fa un numero < 4 "
= "il dado fa 1 o 2" = $\{1, 2\}$

- unione: l'evento $A \cup B$, la "unione di A e B " o anche " A unito B ", è l'insieme degli eventi elementari che appartengono ad almeno uno fra A e B , o, in altre parole, gli eventi elementari che appartengono o ad A , o a B , oppure a tutti e due.



$A \cup B$ = "si verifica almeno uno fra A e B "

= "si verifica A , oppure B , oppure entrambi:"

= "se non si verifica A allora si verifica B "

= "se non si verifica B allora si verifica A "

= " A e B non mancano entrambi di verificarsi"

$\{\square, \square\}$

$\{\square, \square\}$

es. "il dado fa $\square$ o $\square$ " $\cup$ "il dado fa $\square$ o $\square$ "

= "il dado fa un numero dispari" = $\{\square, \square, \square\}$

Attenzione: la congiunzione "e" può far pensare a unire due cose, quindi all'unione: è una trappola!

" A e B " = $A \cap B$
 $\cap$ = INTERSEZIONE

" A o B " = $A \cup B$
 $\cup$ = UNIONE

Esercizio Considerando il lancio di due dadi

1. Elenca gli elementi dello spazio di probabilità Ω con le rispettive probabilità.
2. Descrivi l'evento A "il primo dado $\leq$ al secondo" e calcolane la probabilità.
3. Descrivi l'evento B "la somma dei due dadi è 7" e calcolane la probabilità.
4. Descrivi gli eventi $C = A \cap B$ e $D = A \cap \bar{B}$ e calcolane la probabilità.

fine l. 28