

Esercizio Considerando il lancio di due dadi

1. Elenca gli elementi dello spazio di probabilità Ω con le rispettive probabilità.
2. Descrivi l'evento A "il primo dado fa meno del secondo" e calcolane la probabilità.
3. Descrivi l'evento B "la somma dei due dadi è 7" e calcolane la probabilità.
4. Descrivi gli eventi $C = A \cap B$ e $D = A \cap \bar{B}$ e calcolane la probabilità.

fine l. 28

Soluzione

1. Indicando con la coppia (a, b) l'evento che il primo dado faccia a e il secondo b , abbiamo

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Questi sono, in totale 36 eventi (6 possibilità per il primo dado moltiplicate per 6 possibilità per il secondo), e, per siccome la situazione è simmetrica, devono avere tutti la medesima probabilità $\frac{1}{36}$.

2. L'evento A "il primo dado fa meno del secondo" è costituito dall'insieme delle coppie (a, b) in cui $a < b$. Ossia quelle sottolineate nella tabella seguente

(1 1)	<u>(1 2)</u>	<u>(1 3)</u>	<u>(1 4)</u>	<u>(1 5)</u>	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	<u>(2 3)</u>	<u>(2 4)</u>	<u>(2 5)</u>	<u>(2 6)</u>
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	<u>(3 5)</u>	<u>(3 6)</u>
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	<u>(4 5)</u>	<u>(4 6)</u>
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	<u>(5 5)</u>	<u>(5 6)</u>
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	<u>(6 6)</u>

Per cui $A = \{(1 2), (1 3), (1 4), (1 5), (1 6), (2 3), (2 4), (2 5), (2 6), (3 4), (3 5), (3 6), (4 5), (4 6), (5 6)\}$

Siccome A ha 15 elementi ciascuno dei quali, si è detto, ha probabilità $\frac{1}{36}$, $\boxed{Pr(A) = \frac{15}{36}}$

3. L'evento B "la somma dei due dadi è 7" è l'insieme delle coppie (a, b) con $a+b=7$, ossia quelle cerchiate

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	<u>(2 5)</u>	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	<u>(4 3)</u>	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	<u>(5 2)</u>	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
<u>(6 1)</u>	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

Per cui $B = \{(6 1), (5 2), (4 3), (3 4), (2 5), (1 6)\}$ e, come prima $\boxed{Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$

4. Nella tabella seguente, le coppie sottolineate appartengono ad A , e quelle cerchiate a B .

(1 1)	<u>(1 2)</u>	<u>(1 3)</u>	<u>(1 4)</u>	<u>(1 5)</u>	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	<u>(2 3)</u>	<u>(2 4)</u>	<u>(2 5)</u>	<u>(2 6)</u>
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	<u>(3 5)</u>	<u>(3 6)</u>
(4 1)	(4 2)	<u>(4 3)</u>	(4 4)	<u>(4 5)</u>	<u>(4 6)</u>
(5 1)	<u>(5 2)</u>	(5 3)	(5 4)	<u>(5 5)</u>	<u>(5 6)</u>
<u>(6 1)</u>	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	<u>(6 6)</u>

L'evento $C = A \cap B$ è quindi l'insieme delle coppie che sono sia sottolineate sia cerchiate.

$$C = A \cap B = \{(34), (25), (16)\}$$

Di conseguenza $\boxed{Pr(C) = \frac{3}{36}}$

L'evento $D = A \cap \bar{B}$ contiene, invece, le coppie che sono in A e non sono in B , ossia quelle sottolineate e non cerchiato.

$$D = A \cap \bar{B} = \{(12), (13), (14), (15), (23), (24), (26), (35), (36), (45), (46), (56)\}$$

Per cui $\boxed{Pr(D) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}}$

Terminologia e formule elementari

Un evento che abbia *probabilità 0* si dice *impossibile*.

Per esempio $Pr(\emptyset) = 0$, quindi $\emptyset$ è impossibile.
 insieme vuoto

Un evento che abbia *probabilità 1* si dice *certo*.

Per esempio $Pr(\Omega) = 1$, quindi Ω è un evento certo.
 l'intero spazio di tutti gli eventi elementari

Le probabilità di A e $\bar{A}$ sono legate da

$$Pr(A) + Pr(\bar{A}) = 1$$

Da cui $Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$.

Le probabilità di unione e intersezione soddisfano

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$$

Per cui $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cup B)$$

A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B$ è impossibile,

in questo caso $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$.
 $\uparrow$
 $Pr(A \cap B) = 0$

Giustificazione della formula $Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$

La probabilità di un evento è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono. Prepariamo un diagramma che indichi, per i due membri dell'equazione, quali eventi elementari stiamo sommando.

Primo membro:

$$Pr(A \cup B) = \text{diagramma con } A \cup B \text{ shaded} = \text{diagramma con } A \text{ shaded} \text{ (x)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded} \text{ (y)} + \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded} \text{ (z)}$$

$$Pr(A \cap B) = \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)}$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + 2 \cdot \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

Secondo membro:

$$Pr(A) = \text{diagramma con } A \text{ shaded} = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)}$$

$$Pr(B) = \text{diagramma con } B \text{ shaded} = \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

$$Pr(A) + Pr(B) = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + 2 \cdot \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

I due membri dell'identità rappresentano, quindi, la medesima somma, e, di conseguenza, sono uguali. $\square$

Esercizio: una certa popolazione ha le caratteristiche seguenti:

- un individuo scelto casualmente sull'intera popolazione è **alto** con probabilità 0.4^* (altrimenti è **basso**).
- un individuo scelto casualmente è **nobile** con probabilità 0.1^* (altrimenti è **plebeo**).
- la probabilità che un individuo a caso sia, allo stesso tempo, sia alto che nobile è 0.05^* .

Domanda: con che probabilità un individuo a caso è basso e plebeo?

Soluzione 1 (percentuali) Le divisioni alto-basso o nobile-plebeo separano gli individui in quattro insiemi:

ACT I	ALTO E NOBILE	ALTO E PLEBEO
	7+50 E NOBILE	8+50 E PLEBEO
NOBILI		PLEBEI

Noi sappiamo che la prima riga di questa tabella, gli individui alti, contiene il $40\%^*$ della popolazione, mentre la prima colonna, i nobili, il $10\%^*$.

In fine la casella in alto a sinistra il $5\%^*$.

Di conseguenza la casella in basso a sinistra contiene il $10\% - 5\% = 5\%$ degli individui. Ci inter-

10%	
ACT I	5%
BAS I	5% → 55%
NOBILI PLEBEI	

40%
60%

ressa la casella in basso a destra, quindi ripetiamo il ragionamento sulla seconda riga. Questa deve contenere il $100\% - 40\% = 60\%$ degli individui. Quindi, in definitiva la casella dei plebei bassi contiene il $60\% - 5\% = 55\%$ degli individui. Per rispondere alla

domande dell'esercizio diciamo allora che la probabilità che un individuo preso a caso sia basso e plebeo è $\boxed{0.55}$.

La soluzione con le percentuali serve per meglio illustrare lo spirito delle formule probabilistiche che stiamo studiando.

Tuttavia LA SOLUZIONE CHE È IMPORTANTE CAPIRE È LA SEGUENTE

Soluzione 2 (usando le formule)

Preso un individuo a caso, consideriamo questi eventi:

E_{AN} = "l'individuo è alto e nobile"

E_{AP} = "l'individuo è alto e plebeo"

E_{BN} = "l'individuo è basso e nobile"

E_{BP} = "l'individuo è basso e plebeo"

Questi eventi sono a due a due incompatibili:

$$Pr(E_{AN} \cap E_{AP}) = Pr(E_{AN} \cap E_{BN}) = \dots = 0$$

Inoltre, detti E_A ed E_N gli eventi "l'individuo è alto" e "l'individuo è nobile" rispettivamente, abbiamo

$$E_A = E_{AN} \cup E_{AP} \quad E_N = E_{AN} \cup E_{BN}$$

$$\overline{E_A} = E_{BN} \cup E_{BP} \quad \overline{E_N} = E_{AP} \cup E_{BP}$$

I dati dell'esercizio si possono riassumere nelle formule

$$Pr(E_A) = 0.4 \quad Pr(E_N) = 0.1 \quad Pr(E_{AN}) = 0.05$$

Vogliamo sfruttare la formula

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$$

Il piano è di far leva su $E_A = E_{AN} \cup E_{AP}$ $\overline{E_N} = E_{AP} \cup E_{BP}$.
DATO DATO IN COMUNE DATO RICHiesto

Dalla prima formula

$$P_r(E_A) + \overbrace{P_r(E_{AN} \cap E_{AP})}^{=0} = P_r(E_{AN}) + P_r(E_{AP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(E_A) - P_r(E_{AN})$$

Dalla seconda

$$P_r(\bar{E}_N) + \overbrace{P_r(E_{AP} \cap E_{BP})}^{=0} = P_r(E_{AP}) + P_r(E_{BP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

Quindi

$$P_r(E_A) - P_r(E_{AN}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

$$P_r(E_{BP}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN})$$

Ora $P_r(\bar{E}_N) = 1 - P_r(E_N)$, per cui

$$\boxed{P_r(E_{BP})} = 1 - P_r(E_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN}) = 1 - 0.1 - 0.4 + 0.05 = \boxed{0.55}$$

fine (2)

Probabilità condizionata

Dati due eventi: A e B , supponiamo di constatare che, in una certa situazione, si verifica B . Cosa ci dice questo a proposito di A ?

Esempio. Lanciando un dado, consideriamo gli eventi:

A = "il risultato è ≤ 3 " 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(A) = 0.5$

B = "il risultato è dispari" 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(B) = 0.5$

Entrambi gli eventi hanno probabilità 0.5. In una certa situazione, diciamo, si constata che B si verifica. Ora, i casi possibili sono tre — risultato = 1, 3, 5 — e due di