

Dalla prima formula

$$P_r(E_A) + \overbrace{P_r(E_{AN} \cap E_{AP})}^{=0} = P_r(E_{AN}) + P_r(E_{AP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(E_A) - P_r(E_{AN})$$

Dalla seconda

$$P_r(\bar{E}_N) + \overbrace{P_r(E_{AP} \cap E_{BP})}^{=0} = P_r(E_{AP}) + P_r(E_{BP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

Quindi

$$P_r(E_A) - P_r(E_{AN}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

$$P_r(E_{BP}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN})$$

Ora $P_r(\bar{E}_N) = 1 - P_r(E_N)$, per cui

$$\boxed{P_r(E_{BP})} = 1 - P_r(E_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN}) = 1 - 0.1 - 0.4 + 0.05 = \boxed{0.55}$$

fine (2)

Probabilità condizionata

Dati due eventi: A e B , supponiamo di constatare che, in una certa situazione, si verifica B . Cosa ci dice questo a proposito di A ?

Esempio. Lanciando un dado, consideriamo gli eventi:

A = "il risultato è ≤ 3 " 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(A) = 0.5$

B = "il risultato è dispari" 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(B) = 0.5$

Entrambi gli eventi hanno probabilità 0.5. In una certa situazione, diciamo, si constata che B si verifica. Ora, i casi possibili sono tre — risultato = 1, 3, 5 — e due di

questi sono ≤ 3 , quindi possiamo dire che, sapendo che B si verifica, A ha probabilità $\frac{2}{3}$. Detto in altro modo, condizionatamente al verificarsi di B, la probabilità di A è $\frac{2}{3}$. Questo si esprime con la formula $\underbrace{Pr(A|B)} = \frac{2}{3}$.
 "probabilità di A condizionata a B"

Definizione

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

Intuitivamente la probabilità di A condizionato a B è la probabilità che si verifichi A dal punto di vista di chi sappia già che B si è verificato.

Applicando la formula all'esempio precedente, otteniamo

$$A \cap B = \{\square, \square, \square\} \cap \{\square, \square, \square\} = \{\square, \square\}$$

Quindi:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Importante

Le formule che valgono in generale per la probabilità sono vere anche per la probabilità condizionata

$$Pr(\emptyset|C) = 0 \quad Pr(\Omega|C) = Pr(C|C) = 1$$

$$Pr(A|C) + Pr(\bar{A}|C) = 1$$

$$Pr(A \cup B|C) + Pr(A \cap B|C) = Pr(A|C) + Pr(B|C)$$

Es. Nell'esercizio dei nobili e dei plebei, qual è la probabilità che un nobile preso a caso sia alto, e che un

plebeo preso a caso sia alto?

Soluzione L'esercizio si riferisce alle probabilità condizionate $P_r(E_A | E_N)$ e $P_r(E_A | \bar{E}_N)$.

$$P_r(E_A | E_N) = \frac{P_r(\overbrace{E_A \cap E_N}^{E_{AN}})}{P_r(E_N)} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5$$

$$P_r(E_A | \bar{E}_N) = \frac{P_r(\overbrace{E_A \cap \bar{E}_N}^{P_r(E_A) - P_r(E_{AN})})}{\underbrace{P_r(\bar{E}_N)}_{1 - P_r(E_N)}} = \frac{0.4 - 0.05}{1 - 0.1} = \frac{0.35}{0.9} = 0.3888...$$

Eventi indipendenti

Definizione intuitiva: A e B sono indipendenti (più precisamente "stocasticamente indipendenti") se il verificarsi dell'uno non dà informazioni sull'altro, ossia

$$P_r(A|B) = P_r(A)$$

Usando la definizione di probabilità condizionata possiamo semplificare questa formula

$$\frac{P_r(A \cap B)}{P_r(B)} = P_r(A)$$

$$P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$$

E quest'ultima è la vera definizione di indipendenza

Definizione formale: A e B sono stocasticamente indipendenti se $P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$.

Più in generale gli eventi $A_1, A_2, A_3, \dots$ sono indipendenti se preso qualsiasi sottoinsieme di essi $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots$ vale la formula

$$Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = Pr(A_{i_1}) \cdot Pr(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot Pr(A_{i_k})$$

Osservazione utile: Se A e B sono indipendenti allora:

- A e $\bar{B}$ sono indipendenti,
- $\bar{A}$ e B sono indipendenti,
- $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono indipendenti.

Verifichiamo la prima di queste affermazioni. Dobbiamo calcolare $Pr(A \cap \bar{B})$ e constatare che viene $Pr(A) \cdot Pr(\bar{B})$

Partiamo dall'osservazione che (come nell'esercizio) A e B dividono lo spazio degli eventi in quattro eventi incompatibili: $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B$ e $\bar{A} \cap \bar{B}$.

A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
	B	$\bar{B}$

Inoltre $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Quindi

$$Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(A) - \underbrace{Pr(A \cap B)}_{\text{perché } A \text{ e } B \text{ sono indipendenti}} = Pr(A) - \underbrace{Pr(A) \cdot Pr(B)}_{\text{perché } A \text{ e } B \text{ sono indipendenti}} =$$

$$= Pr(A) (1 - Pr(B)) = Pr(A) \cdot Pr(\bar{B}) \quad \square$$

Eg. Si estraggono dalla popolazione di nobili e plebei due persone indipendentemente. Determina la probabilità che siano: ① della medesima classe sociale ② di classi sociali opposte.

Soluzione Introduciamo gli eventi seguenti:

TABELLA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

$E_{N?}$ = "il primo estratto è nobile"

$E_{P?}$ = "il primo estratto è plebeo" = $\overline{E_{N?}}$

$E_{?N}$ = "il secondo estratto è nobile"

$E_{?P}$ = "il secondo estratto è plebeo" = $\overline{E_{?N}}$

Sappiamo da un dato dell'esercizio che la probabilità che una persona presa a caso sia nobile è 0.1 quindi:

$$Pr(E_{N?}) = Pr(E_{?N}) = 0.1$$

Di conseguenza

$$Pr(E_{P?}) = Pr(\overline{E_{N?}}) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad Pr(E_{?P}) = \dots = 0.9$$

La domanda (1) ci chiede la probabilità dell'evento

$$E_+ = \underbrace{(E_{N?} \cap E_{?N})}_{\text{"sono entrambi nobili"}} \cup \underbrace{(E_{P?} \cap E_{?P})}_{\text{"sono entrambi plebei"}}$$

I due eventi $E_{N?} \cap E_{?N}$ e $E_{P?} \cap E_{?P}$ sono chiaramente incompatibili, quindi

$$\begin{aligned} \boxed{Pr(E_+)} &= Pr(E_{N?} \cap E_{?N}) + Pr(E_{P?} \cap E_{?P}) = \\ &\quad \parallel \qquad \qquad \parallel \text{ usando l'indipendenza} \\ &= Pr(E_{N?}) \cdot Pr(E_{?N}) + Pr(E_{P?}) \cdot Pr(E_{?P}) = \\ &= 0.1 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.9 = \boxed{0.82} \end{aligned}$$

La domanda (2) chiede la probabilità di

$$E_- = (E_{N?} \cap E_{?P}) \cup (E_{P?} \cap E_{?N})$$

Procedendo come prima otteniamo

$$\boxed{Pr(E_-)} = Pr(E_{N?}) \cdot Pr(E_{?P}) + Pr(E_{P?}) \cdot Pr(E_{?N}) = \boxed{0.18}$$

Un altro modo, però, di risolvere la domanda ② è osservare che E_+ e E_- sono complementari: uno dell'altro, per cui $Pr(E_-) = 1 - Pr(E_+) = 1 - 0.82 = 0.18$.

Esercizio

Sono dati tre eventi A, B, C. Gli eventi A e B sono indipendenti, mentre l'evento C è incompatibile con $A \cup B$. Le probabilità di A, B, C sono rispettivamente 0.4, 0.5, 0.1.

- Calcola la probabilità di $A \cup B \cup C$.
- Calcola la probabilità che avvenga uno solo fra A e B condizionata al complementare di C.

fine 1.50